Synthèse d'images 4ETI
Partiel - session 1
2011 - *CPE*

durée 2h.
Tous documents et calculatrices autorisés.
Téléphone et ordinateur interdit

Le barème est donné à titre indicatif.
Illustrez au maximum vos réponses de schémas.

Le sujet comporte 3 pages et contient 8 questions

1 Modélisation paramétrique

Dans cette partie, nous nous plaçons dans le plan 2D.

1.1 Modélisation par cubiques

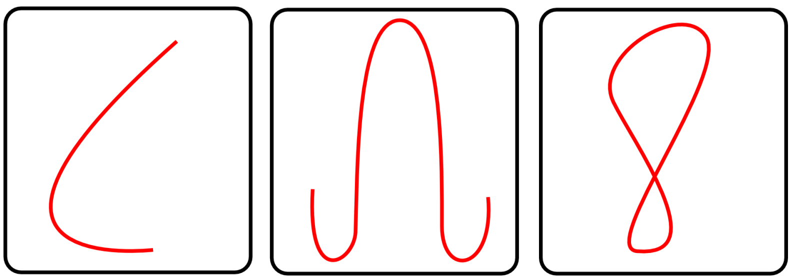

FIGURE 1 – Courbes formées par des Béziers de degré 3.

La fig. 1 représente trois courbes réalisées à partir de courbes de Béziers de degré 3. Certaines ont nécessité plusieurs courbes cubiques mises bout à bout.

Question 1 (2 points) *Pour chaque cas, déterminer le nombre minimal de courbes qui ont été utilisées et tracez le(s) polygone(s) de contrôle(s) correspondant(s). (solution non unique)*

1.2 Interpolation par courbes de degré deux

Nous souhaitons définir une courbe polynomiale c de paramètre $t \in [0, 1]$ de degré deux interpolant trois points du plan $(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ comme montré en fig. 2. Plus spécifiquement, on cherche à avoir

$$c(0) = \mathbf{p}_0,\ c(0.5) = \mathbf{p}_1 \text{ et } c(1) = \mathbf{p}_2 .$$

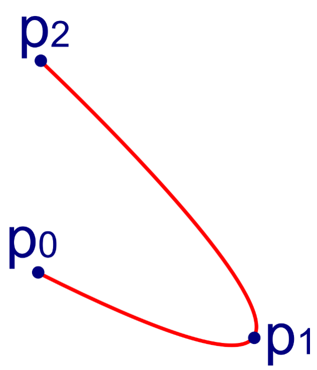

FIGURE 2 – Courbe de degré 2 interpolant trois points du plan.

On notera qu'un tel polynome de degré deux peut s'exprimer de manière générale par

$$c : \begin{cases} [0,1] & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \alpha t^2 + \beta t + \gamma \, . \end{cases}$$

Question 2 (1 points) *Trouvez les valeurs de (α, β, γ) du polynome d'ordre 2 pour satisfaire à ces contraintes.*

On rappelle qu'une courbe de Bézier de degré 2 peut s'écrire sous la forme

$$c(t) = (1-t)^2 \, A + 2t(1-t) \, B + t^2 \, C \, ,$$

où $(A, B, C) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ représentent les points de contrôle de la courbe, et $t \in [0, 1]$.

Question 3 (3 points) *En se servant du résultat précédent, déterminer la formulation de cette courbe par une Bézier. C'est-à-dire que l'on exprimera les points de contrôle en fonction (A, B, C) en fonction de (α, β, γ), puis de $(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$.*
Interprétez graphiquement, est-ce que ce résultat était prévisible ?

2 Modélisation projective, déformation de l'espace

Soit les matrices de transformations de l'espace suivantes :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; M_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 & 3/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Question 4 (2.5 points) *Que représentent ces matrices lorsqu'elles sont appliquées à une position $\mathbf{p} = (x, y, z, 1)$? Caractérisez les transformations associées le plus précisément possible.*

3 Illumination

L'illumination par la méthode de Gouraud vue en cours définit trois composantes : La composante ambiante, diffuse et spéculaire.

Question 5 (2.5 points) *Rappelez la méthode de calcul de ces composantes (schéma(s) nécessaire(s)), ainsi que leur rôle sur l'aspect final de l'image.*

4 Lancer de rayons

4.1 Généralités

Question 6 (2.5 points) *Rappelez les avantages/inconvénients spécifiques des méthodes de rendus par projection, et par ray-tracing.*

Donnez 2 exemples d'applications typiques pour chacune de ces deux approches.

Soit un rayon partant de la position $\mathbf{p}_0 \in \mathbb{R}^3$ de vecteur directeur unitaire $\mathbf{u}$ décrit par l'équation : $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 : t \mapsto \mathbf{p}_0 + t\mathbf{u}$ pour $t \in \mathbb{R}^+$.
Soit un plan P de normale $\mathbf{n}$ passant par $\mathbf{p}_p$.
Soit une sphère S de centre $\mathbf{p}_s$ et de rayon r.

Question 7 (2.5 points) *Donnez directement les résultats de cours (démonstration non demandée) de l'intersection de ce rayon avec le plan ainsi que la sphère en fonction des paramètres donnés. Illustrez les différents cas possibles.*

4.2 Calcul d'un lancer de rayon

Soit la scène 3D contenant les éléments suivants :

- Un plan bleu d'équation $y = 0$.
- Un demi-plan rouge d'équation $z = 1$ pour $y > -1.1$.
- Une lumière positionnée en $\mathbf{p}_L = (0, -2, 2)$.

On lance un rayon partant de $\mathbf{p}_0 = (0, -1, -1)$ dans la direction $\mathbf{u} = (0, 1, 1)$. (pour simplifier les calculs, on pourra noter que l'expression de l'intersection avec le plan ne présuppose pas que la direction $\mathbf{u}$ soit normalisée.)

Question 8 (4 points) *Quelle est la couleur du pixel associée à ce rayon ? L'intersection est-elle dans l'ombre ou éclairée directement ?*