

Génération de surfaces isométriques à un patron par découpage récursif

Damien Rohmer, Marie-Paule Cani, Stefanie Hahmann et Boris Thibert

Grenoble Universités, LJK

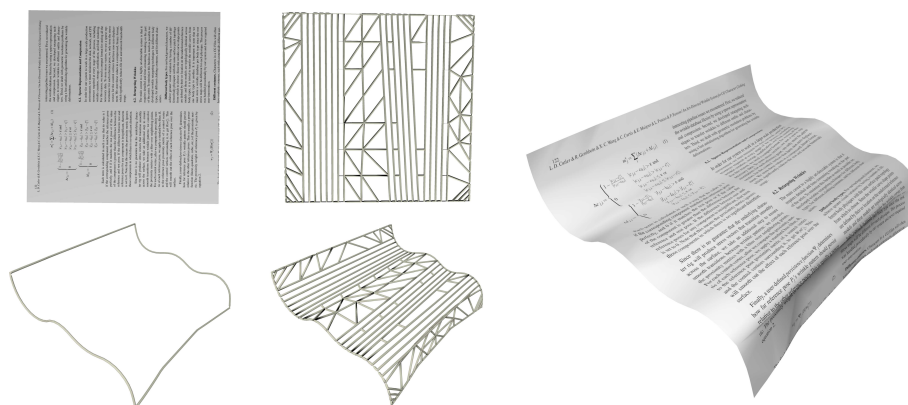


Figure 1: De gauche à droite: Données d'entrée: patron 2D + bord 3D; arêtes générées par notre méthode; surface finale quasi-développable et isométrique au patron.

Abstract

La génération de surfaces développables respectant l'isométrie à leur patron original permet la modélisation de déformations de tôles, papiers et tissus raides. La difficulté à modéliser les matériaux inextensibles à l'aide des simulateurs physiques classiques rend ces modèles virtuels encore difficiles et longs à générer de nos jours. Nous proposons une approche géométrique permettant de générer une surface quasi-isométrique à son patron dont le bord approxime la courbe 3D donnée en entrée. L'efficacité de la méthode et la qualité visuelle des surfaces obtenues résident dans une approche récursive locale générant des arêtes uniquement le long des lignes de plis. La nature globale du problème est également prise en compte grâce à une relaxation linéaire intermittente. La méthode actuelle permet d'obtenir des résultats visuels satisfaisants pour modéliser des surfaces isométriques plissées. Une étude quantitative montre que la préservation de longueur est respectée avec une excellente précision, notamment meilleure que celle d'une simulation physique de tissu correspondant aux mêmes bords.

Keywords: Surface développable, préservation de longueur, modélisation de papier plissé.

1. Introduction

Les matériaux tels que le papier, le métal, certains tissus rigides (cuir, ...) présentent des contraintes très fortes d'inextensibilité. Ils ne peuvent ni se compresser, ni s'étirer dans aucune direction. Ces matériaux possèdent ainsi la propriété de pouvoir se déplier à plat sur leur patron sans au-

cune déformation; les surfaces associées sont qualifiées de développables.

La modélisation virtuelle de telles surfaces est complexe et généralement lourde en temps de calculs du fait de la nature intrinsèquement globale et non linéaire du respect d'une contrainte d'isométrie. De ce fait, les approches existantes sont le fruit de compromis entre précision du respect de l'isométrie et temps de calculs. De plus les matériaux totalement inextensibles tels que le papier présentent des lignes de plis discontinues. Modéliser ce type de surface sans un

maillage adapté le long de ces plis résulte en une perte de temps de calcul dans les régions planes, et en une mauvaise approximation le long de la discontinuité.

L'originalité de notre approche est de modéliser ces matériaux inextensibles en subdivisant une surface récursivement le long de ses lignes de plis. La sélection des arêtes à ajouter successivement est réalisée automatiquement grâce à un critère d'étirement local, et à chaque étape, la nouvelle géométrie générée améliore l'isométrie. Lorsque cette approche locale ne permet plus d'améliorer le critère d'isométrie, nous entrelaçons entre les étapes de subdivision des phases de relaxation globale des sommets actuels, à l'aide d'une déformation *as rigid as possible*.

Les avantages de notre méthode sont :

- Une construction de surface quasi isométrique au patron, qui approxime la courbe de bord 3D donnée en entrée et l'améliore si elle n'était pas parfaitement isométrique au bord du patron.
- La génération d'une géométrie développable à partir de courbes de bords, non restreinte, contrairement aux méthodes existantes, au polygone convexe s'appuyant sur la frontière de la surface.
- Une génération de plis de qualité, grâce à un maillage construit automatiquement le long des arêtes vives au cours de la subdivision. Cela évite tout problème de résolution et le nombre de triangles du maillage final reste faible.
- Un temps de calcul raisonnable (1-20s) pour modéliser une surface plissée (<1s pour une surface tendue) grâce à une approche récursive de subdivision en sous-problèmes locaux tant que possible, entrelacée de relaxations linéaires globales si nécessaire.
- Une approche purement géométrique pouvant traiter des surfaces non lisses comme le papier, qui serait très difficile à obtenir par simulation physique.

1.1. Etat de l'art

Les approches classiques de modélisation de surfaces isométriques à leur patron sont majoritairement basées sur des méthodes physiques. Considérer une raideur importante sur les éléments discrets permet de limiter les élongations et compressions. Ceci rend en contrepartie les systèmes à résoudre mal conditionnés et génère des problèmes de stabilité et de performances [CK02]. Récemment des méthodes s'intéressent particulièrement à une contrainte forte d'isométrie de manière géométrique explicite [EB08,SSBT08], ou par intégration de contraintes supplémentaires dans le système physique [Pro97,VMT07,LTJ07,BB08,TPS09]. Un compromis reste cependant à mettre en place entre le pourcentage d'extension/compression à ne pas dépasser et la rapidité de l'algorithme. De plus, ces approches restent peu adaptées pour modéliser des surfaces à arêtes vives telles que du papier froissé, du fait de leur considération sous-jacente de surface lisse. Burgoon *et al.* [BGW06] proposent d'in-

clure ces discontinuités dans leur modèle de plaque mince, mais ces arêtes vives doivent être définies manuellement par l'utilisateur.

D'un autre côté des approches géométriques modélisent spécifiquement des surfaces développables. La création de patches développables par produit tensoriel fut tout d'abord étudiée [PF95] mais ce travail restreint la modélisation aux topologies des patches tensoriels et ne résout pas les problèmes de raccords entre patches. Par la suite, Frey [Fre04] propose une approche algorithmique pour trianguler un bord 3D le long des règles d'une surface développable lisse. Le bord reste cependant contraint à pouvoir être projeté sans ambiguïté sur un plan. Rose *et al.* [RSW*07] étendent la méthode pour des bords 3D complexes issus de croquis. Dans le cas de contraintes ponctuelles, Pternell [Pet04] propose une méthode d'approximation par une surface développable. Sous la contrainte de définir manuellement des courbes géodésiques sur la surface, Bo et Wang [BW07] modélisent une surface développable s'approchant de l'aspect de papier froissé. Enfin [LPW*06] définissent une méthode de subdivision de maillage quadrilatère convergeant vers des portions de cônes développables. Toutes ces approches permettent d'obtenir des surfaces absolument développables, mais ne gèrent pas le respect de l'isométrie vis à vis d'un patron initial. De plus, elles ne modélisent que des bouts de surface C2-développable. C'est à dire des surfaces réglées sans points singuliers et sans arêtes vives. Les surfaces restent ainsi contraintes à rester dans le domaine défini par le polygone convexe s'appuyant sur leur bord initial. Le cas d'un papier froissé ne peut donc pas être traité sans un découpage manuel préalable le long d'arêtes vives qui seraient à définir.

Si un maillage de départ est fourni, une autre approche géométrique consiste à appliquer une suite de petits déplacements des sommets afin de rendre la surface plus développable. Wang et Tang [WT04] proposent de déformer un maillage existant de manière à le rendre de plus en plus développable à l'aide de minimisations non linéaires. Les surfaces ne sont plus absolument développables mais les sommets intérieurs peuvent être pris en compte afin de générer des plis. Popa *et al.* [PZB*09] appliquent également une minimisation globale sur un maillage capturé et introduisent des contraintes temporelles pour permettre leur animation. Alors que ces deux méthodes ne gèrent pas le respect de l'isométrie à un patron, Tang et Chen [TC09,CT10] minimisent également une contrainte liée à la développabilité, mais en considérant en plus les changements de longueur vis à vis du maillage original. Leurs données d'entrée consistent en un maillage initial et des contraintes de positions de certains sommets. Ils prennent également en compte la gravité et des collisions lors d'une succession d'étapes de minimisations résolues sous forme linéaire et parviennent à modéliser des tissus complexes plissés. Les contraintes de positions du modèle 3D d'entrée restent cependant complexes à définir de par la nécessité de connaître la correspondance entre la posi-

tion spatiale d'un sommet donné et sa position dans l'espace du patron. Au final, ces approches restent peu adaptées pour modéliser des matériaux se déformant le long d'arêtes vives, du fait de l'utilisation de maillages fixés au départ. De plus les temps de calculs des différentes minimisation restent importants (supérieur à la minute).

Enfin Decaudin *et al.* [DJW*06] proposent une approche géométrique procédurale de création de plis développables pour des tissus au patron donné, enveloppant des parties cylindriques du corps humain. Cette approche pourrait être utilisée pour du papier, car un maillage spécifique alignant ses arêtes aux lignes de pli est utilisé pour assurer une visualisation exempte d'artefacts. La méthode mime particulièrement bien les tissus compressés le long de cylindres, mais reste d'un autre côté limité à ce type de géométrie. La nécessité d'avoir un maillage construit au préalable ne permet pas non plus de modéliser des plis issus de contraintes imprévues.

Plan

Contrairement aux approches existantes, notre méthode permet de prendre en compte à la fois une courbe de bord 3D et un patron 2D, avec lequel il faut respecter l'isométrie. Les surfaces engendrées peuvent sortir de l'enveloppe convexe de leur bord. De plus, un maillage adapté est engendré par découpage récursif le long des lignes où les plis sont les plus marqués, ce qui rend la méthode applicable à la modélisation de papier froissé.

Dans un premier temps, nous présentons notre approche par découpage récursif du domaine du patron ainsi que de son mapping 3D, qui permet de modéliser rapidement des surfaces tendues. Dans un second temps, nous introduisons la génération de plis géométriques lorsque la surface isométrique sous-jacente est plissée. Un critère de qualité d'isométrie est mis en place pour s'assurer de générer une surface respectant les longueurs mesurées sur le patron.

2. Cas des surfaces tendues : un découpage récursif

Soit Γ une courbe fermée de l'espace modélisant le bord souhaité de la surface finale 3D. On paramétrise cette courbe par t que l'on considérera arbitrairement compris dans $[0, 1]$, avec $\Gamma(1) = \Gamma(0) \in \mathbb{R}^3$. Afin de vérifier le critère d'isométrie, nous noterons par $\bar{\Gamma}(t) \in \mathbb{R}^2$ les positions respectives des points de la courbe dans l'espace du patron. $\bar{\Gamma}$ correspond donc à une courbe dans le plan délimitant le bord du patron. On suppose le respect approché des longueurs des deux bords respectifs ($\text{longueur}(\Gamma) \simeq \text{longueur}(\bar{\Gamma})$) mais l'approche ne requière pas un respect exact.

Nous considérons dans cette première partie un cas particulier où la surface isométrique de bord Γ existe et peut être modélisée par un ensemble de patches C2-développables (et donc réglés) sans point de discontinuité interne. C'est à

dire que les lignes de discontinuité séparatrices ne se croisent pas.

La partie suivante explique comment déterminer et construire une surface le long de ces lignes de plis par une approche récursive. Nous montrerons ensuite l'application à la modélisation de surfaces tendues.

2.1. Choix des arêtes

Étant donné un bord Γ de l'espace et sa correspondance paramétrée $\bar{\Gamma}$ du plan, nous cherchons à trouver au moins une règle de la surface liant deux positions de Γ comme illustré en Fig. 2. Soit t_1 et t_2 les paramètres de Γ correspondant à ces positions. Si $[\Gamma(t_1), \Gamma(t_2)]$ est une règle de la surface alors

$$\|\Gamma(t_1) - \Gamma(t_2)\| = \|\bar{\Gamma}(t_1) - \bar{\Gamma}(t_2)\|. \quad (1)$$

La réciproque est également vraie, à savoir que la seule courbe reliant deux position $\Gamma(t_1)$ et $\Gamma(t_2)$ de l'espace et ayant une longueur égale à $\|\Gamma(t_1) - \Gamma(t_2)\|$ est forcément ce même segment de droite.

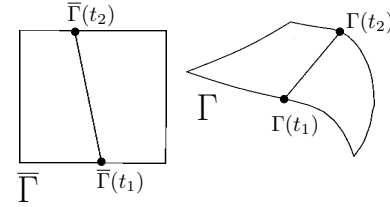


Figure 2: Domaine 2D du patron (gauche) et sa correspondance en 3D (droite).

Ceci nous permet de définir un algorithme de découpage récursif du patron le long d'arêtes tendues correspondant à des segments de droite dans l'espace (voir Fig. 3). Son fonctionnement est le suivant :

1. Étant donné Γ et $\bar{\Gamma}$, trouver t_1 et t_2 vérifiant eq. 1.
2. Définir un partitionnement en deux régions $\bar{\Gamma}^1, \bar{\Gamma}^2$ du domaine du patron ainsi que leur correspondance spatiale en séparant le bord à l'aide du segment $[\Gamma(t_1), \Gamma(t_2)]$.
3. Recommencer à l'étape 1 récursivement sur les deux moitiés du patron, en considérant le couple $(\bar{\Gamma}^1, \Gamma^1)$, puis $(\bar{\Gamma}^2, \Gamma^2)$.

L'égalité de longueur stricte n'est pas forcément respectée si les bords initiaux ne correspondent pas exactement à une déformation surfacique isométrique. Le couple (t_1, t_2) définissant les positions à relier est alors défini plus robustement par le segment le plus tendu. On définit alors $(t_1, t_2) := \operatorname{argmax}_{(u_1, u_2)} \mathcal{F}_{\bar{\Gamma}, \Gamma}(u_1, u_2)$, avec

$$\mathcal{F}_{\bar{\Gamma}, \Gamma}(u_1, u_2) = \left(\frac{\|\Gamma(u_1) - \Gamma(u_2)\|}{\|\bar{\Gamma}(u_1) - \bar{\Gamma}(u_2)\|} - 1 \right). \quad (2)$$

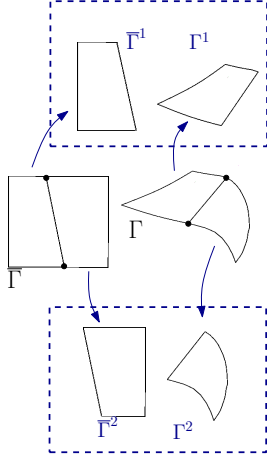


Figure 3: Algorithme de subdivision récursive du bord 2D et de son image 3D le long de segments de droite.

On notera qu’il s’agit bien ici d’une différence signée, où toute valeur positive de $\mathcal{F}(u_1, u_2)$ indique une élongation relative dans le domaine 3D. Dans ce cas, la ligne droite est la *moins mauvaise* solution pour relier ces deux positions. Une valeur négative de $\mathcal{F}(u_1, u_2)$ indique soit une compression locale, soit une géométrie non plane entre ces deux positions.

Si $\max_{(u_1, u_2)}(\mathcal{F}(u_1, u_2)) < 0$ cela signifie qu’il n’existe aucune ligne droite reliant deux points du bord, ce qui correspond à la limite du cas traité dans cette partie.

En pratique, nous implémentons cet algorithme sur des courbes $(\bar{\Gamma}, \Gamma)$ données classiquement par une suite de segments discrets. L’évaluation de \mathcal{F} est donc réalisée sur le sous ensemble des positions discrètes du bord, et chaque nouvelle droite est discrétisée à intervalles fixes suivant un pas d’échantillonnage dL . La complexité de l’évaluation de (t_1, t_2) est quadratique en fonction du nombre de positions du bord. Cependant, le coût de l’évaluation est minime et l’approche récursive scindant chaque partie en deux à chaque étape permet de traiter les sous problèmes de plus en plus rapidement au fur et à mesure de l’avancement des calculs.

Pour des raisons d’efficacité, il est inutile de continuer à subdiviser des régions qui restent planes dans l’espace 3D. Pour cela, nous nous intéressons à $\min_{(u_1, u_2)}(\mathcal{F}_{\bar{\Gamma}, \Gamma}(u_1, u_2))$. Si cette valeur est positive ou nulle, alors l’ensemble de la région est soit planaire, soit totalement étirée et toutes les paires de sommets constituent potentiellement des règles de ce morceau de surface. Nous considérons cela comme un critère d’arrêt de la récursion.

L’algorithme termine lorsque toutes les régions sont planes ou que les lignes tracées ont une longueur inférieur à dL . Une surface interpolante est alors construite par triangulation de chaque portion délimitée sur le patron. Pour

cela un algorithme de Delaunay contraint est réalisé dans le domaine paramétrique comme illustré en Fig. 4. Les arêtes contraintes correspondent aux lignes droites précédemment tracées, et la géométrie 3D est obtenue par le mapping de ces triangles sur les sommets de l’espace.

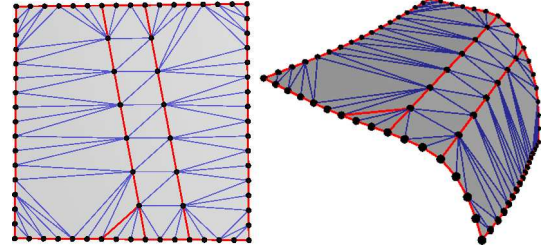


Figure 4: Triangulation de Delaunay contrainte dans le domaine du patron (gauche) ainsi que son mapping 3D (droite).

2.2. Validation sur des cas de surfaces tendues

Une première validation peut être réalisée sur les surfaces satisfaisant aux hypothèses précédentes.

Les figures 5, 6 et 7 présentent les résultats obtenus sur trois cas différents. Les courbes initiales sont générées par une simulation de tissu très rigide et assure l’existence de surfaces tendues quasi-isométriques.

Le premier exemple présente une légère déformation d’un patron rectangulaire. Les lignes de plis principales sont identifiées comme les droites tridimensionnelles, et la géométrie relativement plane est reconstruite rapidement après peu de lignes tirées. Le nombre final de triangle reste donc faible. Le second exemple est un cas de surface dite *strip*. Encore une fois, l’algorithme retrouve les lignes tendues permettant de construire la géométrie ondulante de la bande. Le dernier exemple consiste en une déformation importante de la courbe 3D simulant une feuille tenue par deux extrémités et soumise à la gravité. On notera qu’au moins deux surfaces développables différentes peuvent s’appuyer sur le bord 3D, mais que celle obtenue représente la surface isométrique au patron.

Une observation qualitative montre qu’il n’y a visuellement aucune différence perceptible entre les surfaces construites par notre méthode et les surfaces obtenues par simulation physique de modèles très rigide dont les bords nous fournissent nos données d’entrée.

Des mesures quantitatives rassemblées en fin de document (tableau 1) montrent que le respect de l’isométrie et celui des angles sont légèrement supérieurs pour nos surfaces résultats à ceux la surface de référence issue du modèle physique (confirmant que ce dernier capture difficilement l’inextensibilité).

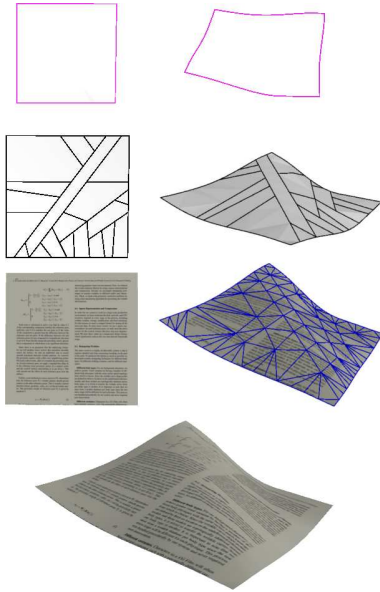


Figure 5: Exemple de reconstruction de surface tendue. De haut en bas : Courbes initiales (patron 2D et 3D), découpage des régions obtenues le long des droites lancées récursivement, domaine texturé et maillage de la surface 3D, résultat final.

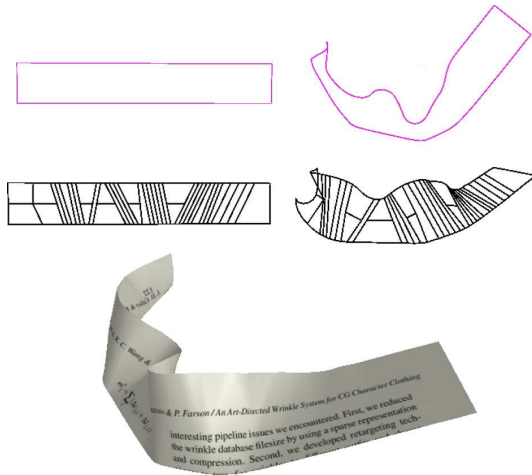


Figure 6: Exemple de construction de surface tendue dans le cas d'un bandeau.

3. Génération de plis géométriques améliorant l'isométrie

Dans cette section, nous étendons la méthode aux cas où il est nécessaire de générer des plis internes plus complexes que de simples segments de droite liant un bord à l'autre. Ces situations se produisent lorsque tous les bords d'une région délimitée par $(\bar{\Gamma}, \Gamma)$ ont été rapprochés les uns des autres et

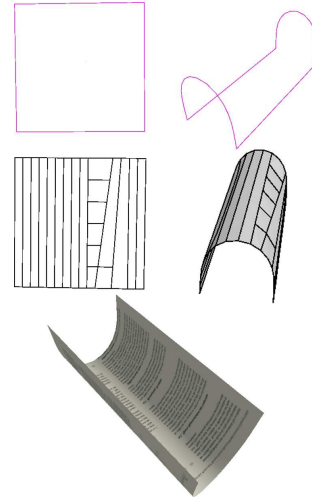


Figure 7: Exemple de construction de surface tendue dans le cas d'une déformation 3D importante.

sont donc tels que $\max_{(u_1, u_2)} (\mathcal{F}(u_1, u_2)) < 0$. Cette région de la surface se plisse alors, et sort de l'enveloppe convexe de son bord. Même le segment le plus tendu $\bar{c} = [\bar{\Gamma}(t_1), \bar{\Gamma}(t_2)]$, que l'on considérera paramétré par son abscisse curviligne normée sur $[0, 1]$, doit alors être mappé en 3D en une courbe gauche c pour respecter l'isométrie (voir Fig. 8)

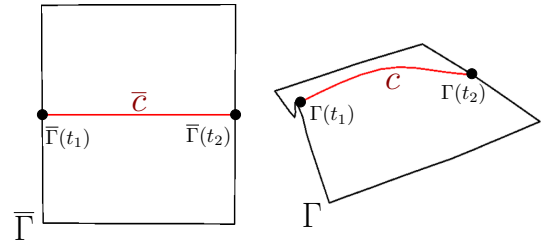


Figure 8: Segment $\bar{c} = [\bar{\Gamma}(t_1), \bar{\Gamma}(t_2)]$ le plus tendu et c , son image 3D, qui présente une géométrie non rectiligne à déterminer.

3.1. Sélection optimale du profil géométrique

Dans la suite de cette partie, nous modélisons c par une courbe polynomiale cubique, pour les raisons suivantes :

- Les lignes de plis obtenues par des courbes cubiques approximent convenablement des portions de cylindres ou de cônes formant les patches des surfaces C^2 -développable.
- Les cubiques minimisent l'intégrale de courbure le long du pli et n'introduisent ainsi pas d'oscillation supplémentaire non désirée.
- Le nombre de degrés de liberté reste faible, permettant une minimisation stable et efficace.

Afin de s'assurer d'améliorer l'isométrie de la surface lors de l'ajout du plis marqué par la courbe c , il convient de trouver c tel que le maillage final obtenu après subdivision respecte mieux les longueurs mesurées sur le patron que le modèle actuel, sans point intérieur. Pour cela on définit deux paires de surfaces triangulées (voir Fig. 9) :

- (\bar{S}_0, S_0) correspond au maillage de l'étape actuelle s'appuyant uniquement sur $(\bar{\Gamma}, \Gamma)$ et donc sans sommet intérieur.
- $(\bar{S}_1(\bar{c}), S_1(c))$ correspond aux deux maillages obtenus après ajout de la ligne de plis intérieur le long d'une courbe c donnée et de son segment 2D associé \bar{c} sur le patron.

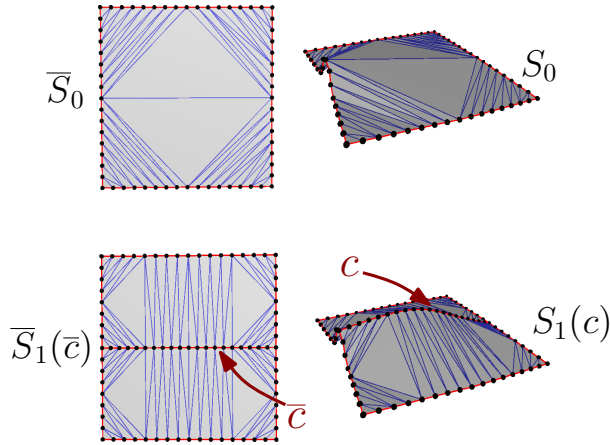


Figure 9: Paires de maillages (\bar{S}_0, S_0) sans point intérieur et $(\bar{S}_1(\bar{c}), S_1(c))$ après ajout de la courbe c 3D.

Afin de mesurer le respect de l'isométrie, nous considérons une fonction d'erreur

$$E(\bar{S}, S) = \sum_{\text{arêtes } i} (L_i - \bar{L}_i)^2, \quad (3)$$

avec L_i (resp. \bar{L}_i) la i ème arête du maillage S (resp. \bar{S}). Notons que $E(\bar{S}, S) = 0$ est équivalent à avoir un maillage isométrique à son patron planaire, et donc à obtenir la surface développable souhaitée.

Trouver la surface la plus isométrique revient alors à trouver la courbe cubique c tel que $E(\bar{S}_1(\bar{c}), S_1(c))$ soit minimale (voir Fig. 10).

En pratique, nous réalisons la minimisation sur le choix des tangentes de départ et d'arrivée de la cubique, soit 6 degrés de libertés par minimisation. Pour cela, on utilise un algorithme de descente de gradient de type quasi-Newton suivant une direction donnée par la méthode de BFGS. La position initiale est le segment de droite. Cette étape est la plus longue en temps de calcul dû au besoin d'itérations sur la minimisation. Il s'agit cependant d'un sous problème de très faible dimension comparé à une optimisation directe sur un maillage complet, et celui-ci n'intervient que si la région est globalement plissée.

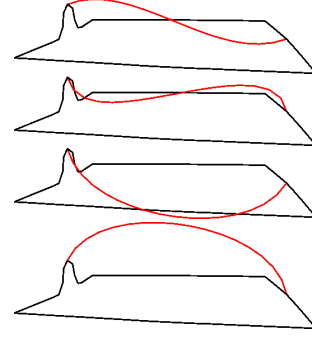


Figure 10: Différents profils possibles pour la courbe c . Chaque profil est associé à un maillage $S(c)$ et à une erreur en isométrie propre.

Une fois la courbe optimale obtenue, le gain en isométrie apporté par cet ajout d'arête est quantifié par le terme

$$g = \frac{E(\bar{S}_0, S_0)}{E(\bar{S}_1(\bar{c}), S_1(c))}.$$

- Si $g \geq 1$, alors l'ajout est bénéfique et l'isométrie est améliorée (au pire inchangée). L'algorithme récursif peut alors se poursuivre.
- Si $g < 1$, l'ajout de la cubique optimale apporte une diminution de la qualité du respect des longueurs par rapport à une triangulation sans point intérieur.

Ce dernier cas peut se rencontrer si la surface sous-jacente que l'on tente de modéliser possède plusieurs points d'inflexions. L'approximation par une cubique sera alors de mauvaise qualité. Cette région est alors laissée inchangée à ce stade de l'algorithme et taguée comme incomplète.

3.2. Relaxation globale lorsque l'approche locale échoue

Une fois que l'ensemble des régions ont été traitées, une relaxation globale est mise en place afin d'agrandir l'espace des solutions au delà de l'ensemble de courbes cubiques, tout en forçant l'amélioration de l'isométrie au sens des moindres carrés.

Pour cela, on considère le maillage obtenu après l'ensemble des étapes précédentes. Les sommets de ce maillage sont alors déplacés au sens *as rigid as possible* [SP04] afin de préserver au mieux l'orientation des triangles existants tout en assurant une déformation la plus isométrique possible entre le patron et le maillage 3D. Pour cela, les matrices de transformation 4×4 des triangles 2D vers 3D sont considérées, et seule la partie rotationnelle est prise en compte. Les positions du maillage approximant au mieux ces orientations de triangles sont alors calculées comme solution d'un système linéaire. D'un point de vue complexité, l'approche consiste en une inversion de matrice linéaire creuse et n'influe que très peu sur le temps de calcul.

En pratique, nous observons généralement une amélioration de l'erreur en isométrie de l'Eq. 3 lors de cette étape. Cette approche permet également de relaxer les contraintes sur les bords originaux. Il est donc possible, si souhaité, de déformer ceux-ci. Notons que cela permet une plus grande robustesse de l'algorithme qui permet de considérer comme entrée un bord Γ non parfaitement isométrique à $\bar{\Gamma}$. Dans ce cas, le bord Γ sera modifié de façon cohérente avec le maillage intérieur pour devenir de plus en plus isométrique.

Une fois le maillage déformé calculé nous reconsidérons les sommets délimitant les régions taguées précédemment comme non complètes. Ces régions délimitées par leurs bords discrets servent alors de nouveaux point de départ pour l'algorithme récursif (voir Fig. 11).

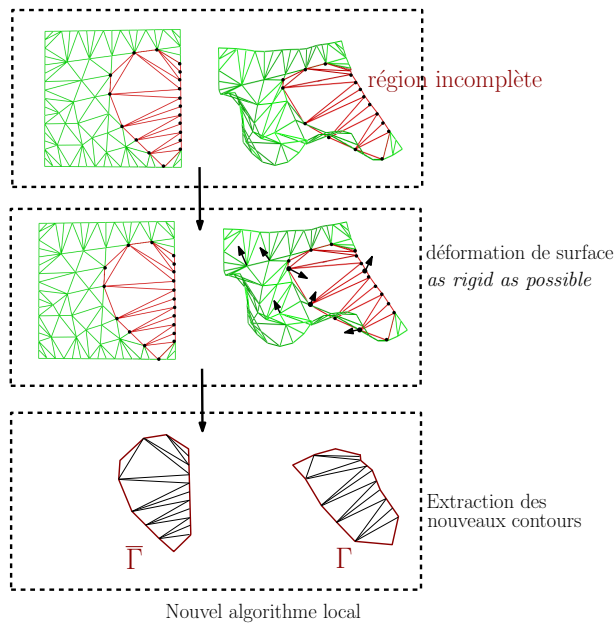


Figure 11: Exemple d'application de la relaxation globale. Haut : Maillage du patron et son mapping 3D avec une région incomplète en rouge. Milieu : Application d'une déformation globale par sommet par l'algorithme as rigid as possible. Bas : Les contours déformés de l'ancienne région incomplète servent de base à une nouvelle subdivision récursive.

L'algorithme de génération de plis se termine sur un morceau de surface donné lorsque

- La région est plane
- Les plis ajoutés auraient une longueur inférieure à l'échelle de discrétisation utilisée.
- Malgré la relaxation globale précédente, aucune cubique ne parvient à faire décroître l'erreur par rapport à l'état actuel.

Notons que dans le troisième cas, il reste possible d'accepter la moins mauvaise cubique afin de poursuivre l'algorithme

jusqu'à rencontrer les deux premiers critères d'arrêts. Dans ce cas, bien que n'améliorant pas l'isométrie à l'étape suivante, on observe en pratique un bon comportement de l'algorithme par la suite avec, au final, une diminution globale de l'erreur sur plusieurs étapes.

3.3. Application au cas de surfaces plissées

Nous appliquons notre méthode à différents cas de bords représentant des surfaces globalement plissées.

La figure 12 considère le cas d'un contour rectangulaire pincé sur un bord. La forme finale obtenue possède des plis internes et est visuellement plausible par rapport à la déformation d'une feuille de papier. La figure 13 montre le maillage obtenu par une simulation physique de tissu, de même que la photo d'une vraie feuille de papier. On notera que la surface obtenue est à la fois consistante avec la contrainte de bord donnée par la simulation physique et visuellement plus proche du véritable papier. On pourra de plus remarquer que la contrainte d'isométrie forte oblige la feuille de papier à descendre plus bas que ses bords au bout de la pliure. Ce phénomène n'apparaît pas dans le modèle de masse-ressort créant de légères elongations, mais se retrouve bien dans notre résultat. L'étude quantitative résumée au tableau 1 montre que l'isométrie du maillage obtenu par notre méthode est globalement mieux préservée que par le modèle physique.

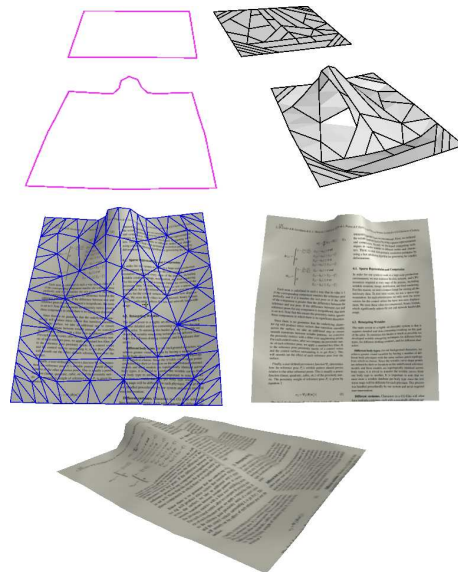


Figure 12: Résultat obtenu pour un bord rectangulaire pincé. Les bords originaux sont montrés en haut à gauche, et la surface obtenue par subdivision en haut à droite. Les trois dernières images montrent le maillage final et le résultat texturé.

La figure 14 présente le cas d'une déformation plus importante du bord 3D. La surface sous-jacente est fortement plissée

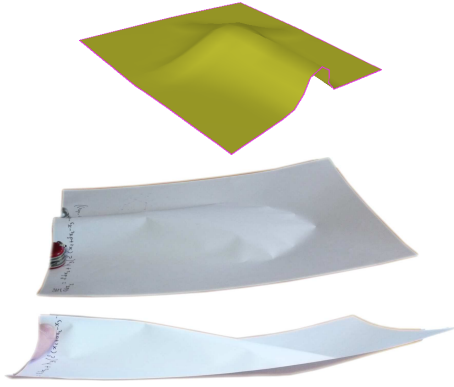


Figure 13: Haut : Surface obtenue par un modèle physique de tissu moyennement rigide avec une contrainte de non pénétration sphérique interne. Bas : Photos d'une vraie feuille de papier pliée sous deux angles différents.

sée et possède une géométrie sortant largement du domaine convexe s'appuyant sur le bord 3D initial. Notre algorithme parvient à donner un résultat plausible visuellement vis à vis de la déformation d'une feuille de papier comme montré en Fig. 15. Mais de plus, il est également très proche de la surface obtenue par la simulation physique prenant en compte une contrainte sphérique interne difficilement prévisible à la simple vue du bord original.

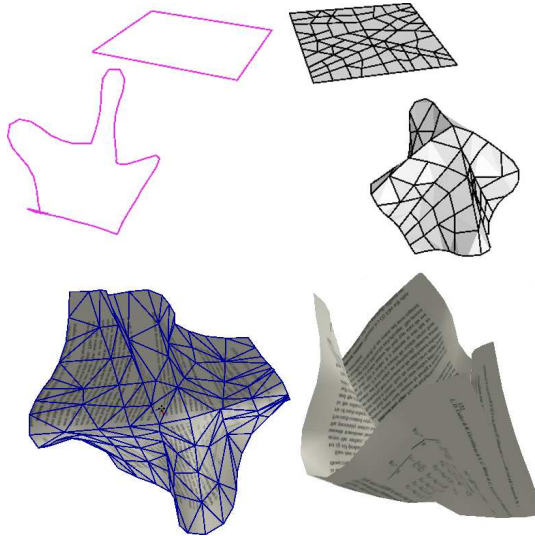


Figure 14: Résultat obtenu dans le cas d'un bord fortement plissé.

Le dernier exemple en Fig. 16 montre le cas d'une surface dont les plis ne sont pas modélisable par des courbes planaires. L'exemple de la figure 7 est déformé une seconde fois en compressant les bords 3D dans la direction opposée

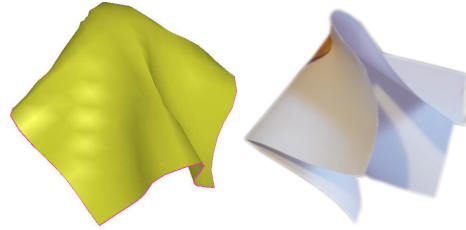


Figure 15: Gauche : Surface obtenue par simulation physique d'un tissu rectangulaire tombant sur une sphère centrale. Droite : Photo d'une vraie feuille de papier pliée.

par une contrainte de non pénétration. Afin de respecter le critère d'isométrie, les plis doivent apparaître dans la direction normale à la surface sous-jacente. Le résultat obtenu possède ce type de plis. Nous rappelons que nous ne réalisons aucune supposition sur une direction privilégiée de déformation, la contrainte forte d'isométrie permettant à elle seule de retrouver des directions plausibles.

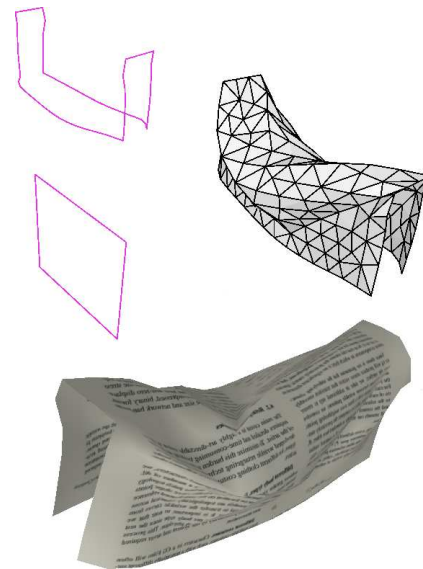


Figure 16: Exemple de surface quasi-isométrique contenant des plis non planaires.

Le tableau 1 suivant donne une mesure quantitative du respect de l'isométrie, d'angle et d'aire pour les différents exemples présentés. Le premier chiffre représente le résultat obtenu par notre méthode, et le second entre parenthèse mesure le même critère sur le maillage obtenu en sortie du simulateur physique (simulation de tissu du logiciel Blender). E est la mesure d'erreur d'isométrie définie par l'Eq. 3. E_{angle} représente l'erreur totale en angle entre ceux

	E	E_{angle}	$E_{\text{area}} \times 10^4$	tps
fig 5	0.21 (0.25)	0.35 (1.90)	1.3 (1.1)	0.5
fig 6	0.09 (0.21)	0.16 (1.40)	0.7 (1.1)	0.3
fig 7	0.56 (0.79)	2.60 (17.6)	5.0 (2.0)	0.5
fig 12	1.28 (2.50)	2.89 (22.8)	8.0 (18)	7
fig 14	1.28 (2.50)	2.89 (22.8)	8.0 (18)	4
fig 16	1.50 (8.60)	2.80 (68.7)	8.0 (42)	4

Table 1: Mesure d'erreurs et de temps de calcul (en seconde) pour les exemples des figures citées.

des triangles plan du patron et le maillage 3D

$$E_{\text{angle}} = \sum_{\text{angle } j} |\alpha_j - \bar{\alpha}_j|,$$

avec α_j (resp. $\bar{\alpha}_j$) le j ème angle du maillage 3D (resp. patron 2D). Enfin E_{area} représente l'erreur finale en aire sommée sur l'ensemble des triangles.

$$E_{\text{area}} = \sum_{\text{triangle } k} |\mathcal{A}_k - \bar{\mathcal{A}}_k|,$$

où \mathcal{A}_k (resp. $\bar{\mathcal{A}}_k$) correspond à l'aire du k ème triangle de la surface 3D (resp. 2D). On notera que dans l'ensemble de nos exemples, le patron est normalisé de telle sorte que son coté le plus long ait une longueur unitaire.

La dernière colonne mesure le temps de calcul qui bien que loin de permettre une modélisation de plis isométriques en temps-réel, reste inférieur à celui des méthodes de minimisation globales.

On notera enfin qu'il est également possible d'utiliser notre méthode pour modéliser des formes plausibles de tissus épais. Considérer le maillage obtenu comme le polygone de contrôle d'une surface de subdivision permet en effet d'obtenir des surfaces lisses dont les plis restent proches d'être développables. Cependant, l'erreur totale en isométrie n'est pas forcément conservée lors du processus de subdivision.

4. Travaux futurs et conclusion

Nous avons présenté une méthode de construction de surface quasi isométrique à un patron planaire à partir d'une courbe interpolant ou approximant le bord 3D. Les résultats visuels sont cohérents vis à vis de déformations de matériaux fortement inextensibles tels que le papier et les mesures quantitatives montrent un bon respect de l'isométrie ainsi que des propriétés des surfaces développables.

Un certain nombre de points pourront encore faire l'objet d'amélioration future :

Premièrement notre approche ne permet pas l'animation des déformations. Les courbes et maillages sont construits pour un bord statique donné. Considérer une cohérence temporelle serait à la fois beaucoup plus coûteux dans l'algo-



Figure 17: Exemples des déformations précédentes obtenues après lissage approximant la forme d'un tissu rigide.

ritme et ne permettrait plus d'adapter le maillage aussi efficacement le long des lignes de plis.

En second lieu, les collisions avec des obstacles externes ne sont pas gérées pour l'instant. Pouvoir prendre en compte des obstacles volumiques nous offrirait un outil pour modéliser plus précisément les formes souhaitées.

D'une manière plus générale, l'algorithme présenté ne donne que peu de contrôle sur la forme finale obtenue. La contrainte très forte d'isométrie, une fois le bord fixé, est difficilement compatible avec des possibilités de contrôle. Être capables d'approximer des contraintes ponctuelles ou de plis internes en certains points du patron serait une amélioration importante. Un compromis entre respect des bords initiaux et critère d'isométrie devra être mise en place afin de respecter ces contraintes supplémentaires.

Pour des exemples extrêmes de papier froissé, les surfaces 3D reconstruites peuvent posséder des auto-intersections tout en gardant de bonnes propriétés vis à vis du respect de l'isométrie au patron. L'évitement de ces auto-intersections reste un problème pour notre approche, et une recherche de type essai-erreur plus coûteuse pourra être étudiée par la suite.

Il est à noter que lorsque l'interpolation exacte du bord est demandée, l'erreur finale en isométrie reste plus importante. En pratique, sur les exemples de surfaces plissées, on obtient typiquement $E \simeq 2E_{\text{modèle physique}}$. Dans ce cas, il reste nécessaire d'agrandir l'espace des solutions possible en considérant des courbes de plis de degré supérieur aux cubiques, ou comportant des discontinuités de tangente. Le temps de calcul serait alors plus conséquent, et le risque d'auto-intersection augmenterait dû aux oscillations plus importantes.

Enfin, bien que l'algorithme soit suffisamment robuste pour traiter des cas de bords initiaux non nécessairement parfaitement compatible avec une déformation isométrique du patron, il reste important d'en rester proche afin d'obtenir une surface plausible. Il n'est cependant pas aisé d'obtenir une courbe 3D en entrée pouvant s'appuyer sur une surface isométrique au patron. Des outils de déformations de courbes préservant les longueurs peuvent être utilisés en tant que critère nécessaire, mais l'existence d'une surface interne respectant l'isométrie n'est pas assurée.

References

- [BB08] BENDER J., BAYER D. : Parallel simulation of inextensible cloth. *Proc. of VRIPhys.* (2008).
- [BGW06] BURGOON R., GRINSPUN E., WOOD Z. : Discrete shells origami. *Proc. of Computers and their Applications.* (2006), 180–187.
- [BW07] BO P., WANG W. : Geodesic-controlled developable surfaces for modeling paper bending. *Computer Graphics Forum.* 26 (2007).
- [CK02] CHOI K.-J., KO H.-S. : Stable but responsive cloth. *ACM Transactions on Graphics.* 21 (2002), 604–611.
- [CT10] CHEN M., TANG K. : A fully geometric approach for developable cloth deformation simulation. *The Visual Computer.* (2010).
- [DJW*06] DECAUDIN P., JULIUS D., WITHER J., BOISSIEUX L., SHEFFER A., CANI M.-P. : Virtual garments : A fully geometric approach for clothing design. *Computer Graphics Forum.* (2006), 625–634.
- [EB08] ENGLISH E., BRIDSON R. : Animating developable surfaces using nonconforming elements. *ACM Transactions on Graphics.* 27 (2008), 1–5.
- [Fre04] FREY W. : Modeling buckled developable surfaces by triangulation. *Computer Aided Design.* 36 (2004).
- [LPW*06] LIU Y., POTTMANN H., WALLNER J., YANG Y.-L., WANG W. : Geometric modeling with conical meshes and developable surfaces. *ACM Transaction on Graphics.* 25 (2006).
- [LTJ07] LIU Y.-J., TANG K., JONEJA A. : Modeling dynamic developable meshes by the hamilton principle. *Computer Aided Design.* 39 (2007).
- [Pet04] PETERNELL M. : Developable surface fitting to point clouds. *Computer Aided Geometric Design.* 21 (2004).
- [PF95] POTTMANN H., FARIN G. : Developable rational bézier and b-spline surface. *Computer Aided Geometric Design.* 12 (1995).
- [Pro97] PROVOT X. : Deformation constraints in a mass-spring model to describe rigid cloth behavior. *Graphics Interface.* (1997), 147–154.
- [PZB*09] POPA T., ZHOU Q., BRADLEY D., KRAEVOY V., FU H., SHEFFER A., HEIDRICH W. : Wrinkling captured garments using space-time data-driven deformation. *Computer Graphics Forum.* 28 (2009).
- [RSW*07] ROSE K., SHEFFER A., WITHER J., CANI M.-P., THIBERT B. : Developable surfaces from arbitrary sketched boundaries. *Symposium on Geometry Processing.* (2007).
- [SP04] SUMNER R., POPOVIC J. : Deformation transfer for triangle meshes. *ACM Transactions on Graphics.* (2004).
- [SSBT08] STUMPP T., SPILLMANN J., BECKER M., TESCHNER M. : A geometric deformation model for stable cloth simulation. *Proc of VRIPhys.* (2008).
- [TC09] TANG K., CHEN M. : Quasi-developable mesh surface interpolation via mesh deformation. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics.* 15 (2009).
- [TPS09] THOMASZEWSKI B., PABST S., STRASSER W. : Continuum-based strain limiting. *Computer Graphics Forum.* 28 (2009), 569–576.
- [VMT07] VOLINO P., MAGNENAT-THALMANN N. : Stop-and-go cloth draping. *The Visual Computer.* (2007), 669–677.
- [WT04] WANG C., TANG K. : Achieving developability of a polygonal surface by minimum deformation : a study of global and local optimization approaches. *The Visual Computer.* 20 (2004).