4ETI IMI, Examen modélisation

2013-2014 (1ere session)
durée 2h

Tous documents autorisés.

Calculatrices interdites.

Répondez aux questions sur une copie séparée.

Le sujet comporte 2 pages

Le temps approximatif ainsi que le barème sont indiqués pour les grandes parties. Notez que le barème est donné à titre purement indicatif et pourra être adapté par la suite.

En cas de doute sur la compréhension de l'énoncé, explicitez ce que vous comprenez et poursuivez l'exercice dans cette logique.

1 Surface paramétrique

[30 min max] 5 points

Soit une courbe paramétrique C définit par la relation

$$C : \left\{ \begin{array}{ll} [0,1] & \to \mathbb{R}^2 \\ u & \mapsto (f_x(u), f_y(u)) \end{array} \right. ,$$

avec (f_x, f_y) deux fonctions de classe C^2.

Soit S la surface paramétrique de révolution donnée par

$$S : \left\{ \begin{array}{ll} [0,1] \times [0, 2\pi] & \to \mathbb{R}^3 \\ (u, \theta) & \mapsto (f_x(u)\cos(\theta), f_x(u)\sin(\theta), f_y(u)) \end{array} \right. .$$

Question 1 *Esquissez l'allure d'une courbe C de votre choix et de la surface S associée.*

Question 2 *Calculez la première forme fondamentale associée à S.*

Question 3 *Quelle est l'équation différentielle que doit vérifier f_x et f_y pour assurer que la fonction S préserve localement les aires.*

2 Application de Gauss

[15 min max] 3 points

On rappelle que l'application de Gauss G d'une fonction f est la fonction telle que

$$G : \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \mapsto n_f(u,v) \end{array} \right. ,$$

où $n_f(u,v)$ est la normale unitaire à f au point (u,v).

On s'interesse à la forme géométrique décrite par la trace de G dans $\mathbb{R}^3$ lorsque l'on fait varier (u,v) sur le domaine de validité de f.

Question 4 *Quelle forme est décrite par la trace de G dans les cas suivants:*

1. *f décrit un plan.*
2. *f décrit un cylindre de rayon r.*
3. *f décrit une sphère de rayon r.*

3 Forme locale de surface

[10 min max] 2 points

Soit un maillage triangulé $\mathcal{T}$ approximant une surface paramétrique S. Soit un sommet i de $\mathcal{T}$. Le défaut angulaire au sommet i vaut -0.2.

On rappelle que le défaut angulaire d est donné par $d = 1/A\left(\sum_{j\in\mathcal{V}_i}\theta_j - 2\pi\right)$, avec $\mathcal{V}_i$, l'étoilé du sommet en question, A l'aire de l'étoilé, et θ_j l'angle au sommet des triangles de l'étoilé de i. On rappelle également que l'étoilé correspond aux triangles voisins d'un sommet donné.

Question 5 *Au sommet i, la surface est localement: planaire, cylindrique, elliptique ou hyperbolique ? Expliquez votre réponse.*

4 Surface implicite

[25 min max] 4 points

Soit ϕ un potentiel définissant une surface de type blob tel qu'en tout point $\mathbf{p}$ de l'espace, $\phi_i(\mathbf{p}) = \exp(-a\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_i\|^2)$.
En prenant $\mathbf{p}_i$ centré à l'origine, la surface associée à l'isovaleur ω est une sphère de rayon r.

Question 6 *Donnez la valeur du paramètre a en fonction de ω et r.*

On ajoute un second blob également centré sur l'origine et de même paramètre a. Soit S, la nouvelle surface associée à la somme des potentiels des deux blobs pour la meme isovaleur ω.

Question 7 *Quelle figure géométrique est décrite par cette nouvelle surface S? Quels sont ces paramètres?*

5 Modélisation

[40 min max] 6 points

Question 8 *Vous souhaitez modéliser une fontaine d'eau. Décrivez avec le maximum de précisions possibles l'approche que vous considérerez. Justifiez vos choix, illustrez ceux-ci de figures explicatives, et donnez un maximum de précisions sur les paramètres et méthodes choisies.*