Maillage avancé

damien.rohmer@cpe.fr

Caractéristique topologique

Plan du cours

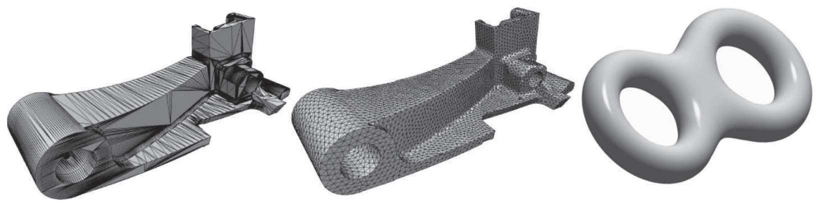
- Caractéristiques topologiques.
- Structure de données avancées : Halfedge.
- Subdivision de maillage.
- Notion de calcul sur variété : Lissage Laplacien.

Charactéristique d'Euler-Poincaré

- Mailage à N_f faces, N_s sommets, N_a arêtes.

$$N_s - N_a + N_f = \chi = 2(c - g) - b$$

χ : Charactéristique d'Euler (Rappel : Gauss-Bonnet).
c : Nbr composante connexes
g : Nbr de trous (genre topologique)
b : Nbr de bords



Hetroy Wikipedia

Structure de données

Encodage Halfedge

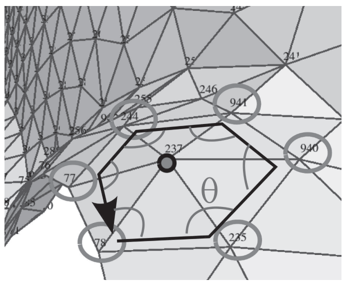
- Encodage Demi-Arêtes (Halfedge)
- Encodage des arêtes : On retrouve les faces par parcours (variété).
- Ajout/suppression en $\mathcal{O}(1)$.

CGAL

Limitation encodage indexé

Encodage géométrie + connectivitée indexée

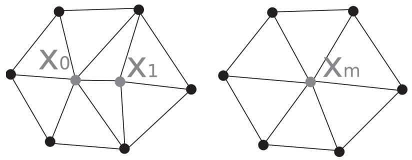
\+ Affichage rapide (si contigu)
\+ Générique
\+ Simple
\- Voisinage non encodé
\- Ajout/suppression en $\mathcal{O}(N)$.



```
OFF
40 95 75
-0.175114 -0.047799 -0.046492
-0.199566 0.730914 -0.064795
-0.010689 0.674496 0.008900
-0.015538 0.153071 0.107408
-0.070148 0.767894 -0.116107
-0.053836 -0.702815 0.109714
-0.162416 -0.785481 0.088014
-0.112365 -0.782492 0.135482
-0.240928 0.031451 0.031966
-0.259289 0.200557 0.035420
0.296891 -0.707385 0.143375
-0.190129 -0.069002 0.109358
-0.010148 0.024179 -0.067283
-0.112968 -0.089127 0.092391
-0.185828 0.377372 -0.111155
3 20 4 1
3 34 11 13
3 12 30 0
3 30 13 17
3 23 22 21
3 29 38 17
3 32 0 13
3 14 0 37
3 24 4 21
3 14 32 1
3 24 2 22
3 3 12 25
3 4 24 15
3 21 15 26
3 35 34 13
3 19 32 13
3 19 13 27
```


Edge Collapse

- Suppression d'arête (edge collapse) = Base de la simplification de maillage



CGAL

Encodage Halfedge comparaison

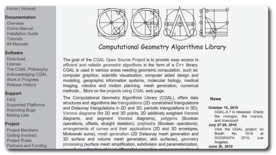
CHoisir la structure la plus adaptée :

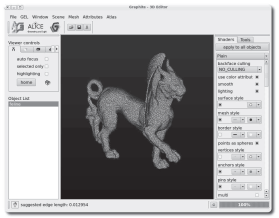
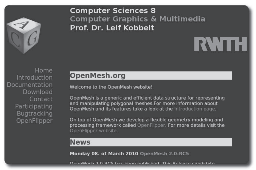
- Tableaux d'indices (vecteurs contigus)
  - \+ Simple, général, adapté GPU.
  - \+ Accès aléatoire $\mathcal{O}(1)$.
  - \- Parcours voisinage en $\mathcal{O}(N)$.
  - \- Ajout/Suppression $\mathcal{O}(N)$.
- Halfedge
  - \+ Parcours voisinage en $\mathcal{O}(1)$.
  - \+ Ajout/Suppression en $\mathcal{O}(1)$.
  - \- Technique, variété uniquement, encodage non contigu.
  - \- Accès aléatoire en $\mathcal{O}(N)$.

```
Halfedge_handle g = h->next()->opposite()->next();
P.split_edge( h->next());
P.split_edge( g->next());
P.split_edge( g);
h->next()->vertex()->point()     = Point( 1, 0, 1);
g->next()->vertex()->point()     = Point( 0, 1, 1);
g->opposite()->vertex()->point() = Point( 1, 1, 0);
Halfedge_handle f = P.split_facet( g->next(),
                                   g->next()->next()->next());
Halfedge_handle e = P.split_edge( f);
e->vertex()->point() = Point( 1, 1, 1);
P.split_facet( e, f->next()->next());
```


Subdivision

Librairies implémentant le Halfedge

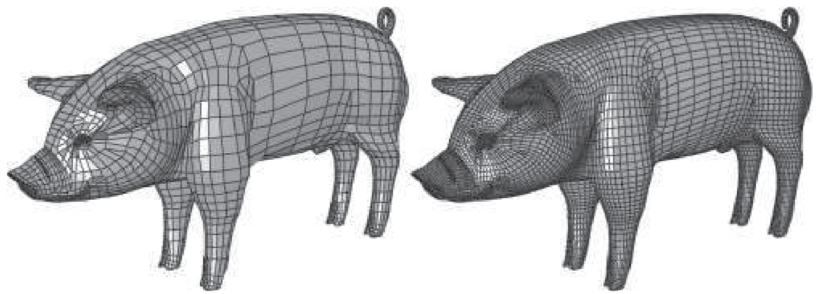


- CGAL (C++ complexe, calcul exact, beaucoup d'algos)
- Graphite (remaillage, parametrisation, GUI)
- OpenMesh (plus simple que CGAL, moins complet)

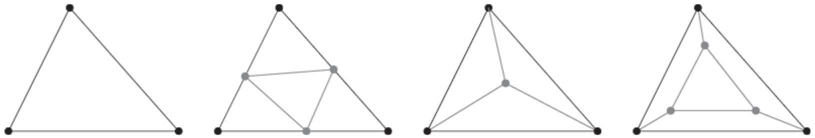
Subdivision de maillage

- Raffiner pour : rendu, calcul, déformer, ...
- Voir cours SIGGRAPH



Subdivision de maillage

- Subdivision de la connectivitée.
- Plusieurs possibilitées de subdivision.

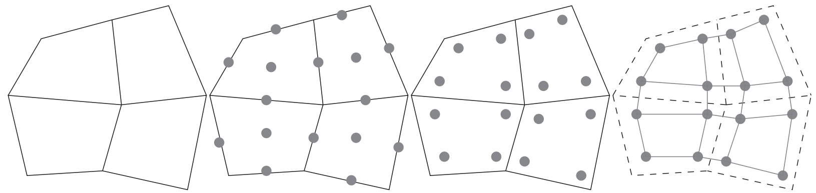


- Présences de polygons quelconques ...
- Structure de données !
- Géométrie
  - Schémas interpolants
  - Schémas approximants

Subdivision

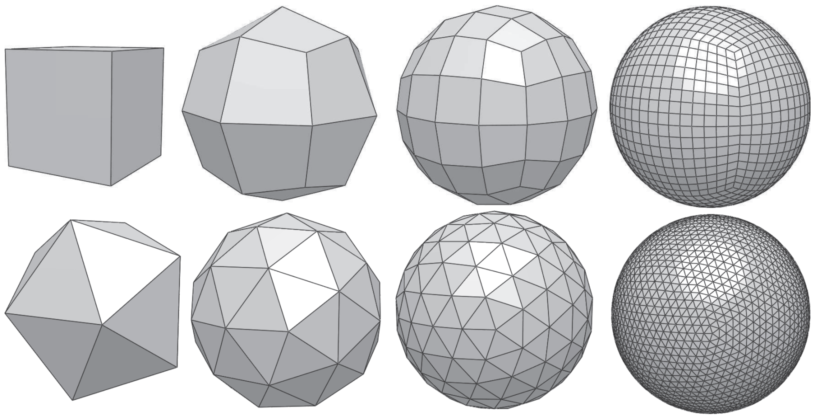
Exemple : Doo-Sabin

1. Soit une face formée par $(x_i)_{i=[\![0,N-1]\!]}$.
2. Construit sommets milieux $m_i = (x_i + x_{i+1})/2$.
3. Barycentre de la face $b = (\sum_i x_i)/N$.
4. Nouveaux sommets = $n_i = (x_i + m_i + m_{i-1} + b)/4$.



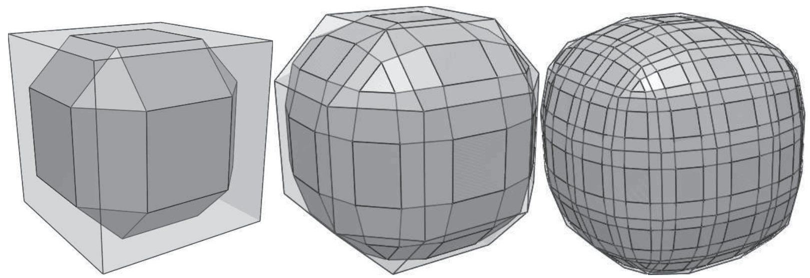
Subdivision de maillage

- Application à la génération d'une sphère par projection :



Subdivision

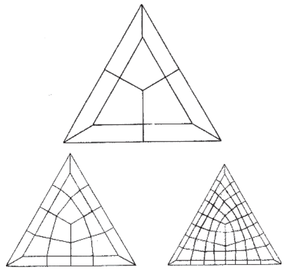
Exemple : Doo-Sabin



Catmull-Clark

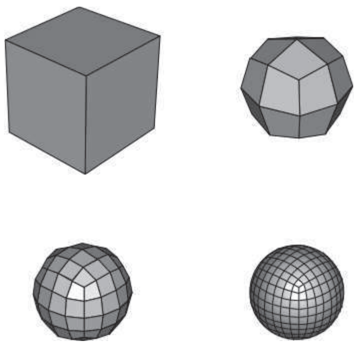
- Un sommet de face = barycentre de l'ancienne face
- Un sommet d'arête = moyenne entre le milieu des anciens sommets et le milieu des faces partageant l'arête
- Nouvelle position du sommet = $\frac{Q+2R+S(n-3)}{n}$

- Q : Moyenne des sommets de face adjacents
- R : Moyenne des points milieux des arêtes incidentes
- S : Anciennes coordonnées
- n : valence



Catmull-Clark Resultats

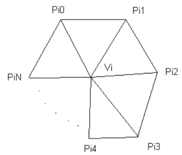
- C^2 sauf au sommets extra-ordinaires
- Schema d'approximation
- Subdivision de face
- Basé de préférence sur des quads



Loop

Maillage Triangulaire

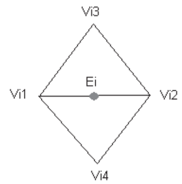
- Nouvelle Position



$$V^{i+1} = (1 - n\alpha)V^i + \alpha \sum_{k=0}^{n} P_k$$

$$\alpha = \frac{1}{n}\left(\frac{5}{8} - \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{4}\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)^2\right)$$

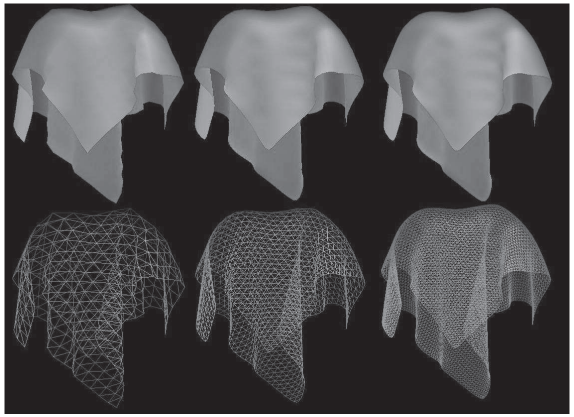
- Sommets d'arêtes



$$E^{i+1} = \frac{3}{8}(V_1 + V_2) + \frac{1}{8}(V_3 + V_4)$$

Loop

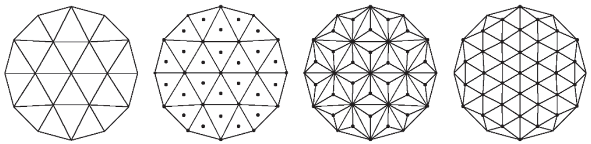
- C^2 sauf au sommets extra-ordinaires
- Schema d'approximation
- Subdivision de face
- Subdivision de triangles



Fisher

$\sqrt{3}$-Kobbelt

Maillage Triangulaire



- Nouveaux sommets : barycentre de l'ancienne face
- Nouvelle position du sommet i :

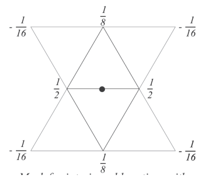
$$(1-\alpha_n)p_i + \frac{\alpha_n}{n}\sum_{j\in\mathcal{V}_i} p_j \qquad \text{(n=valence, } \mathcal{V}\text{=voisinage)}$$

et $\alpha_n = \frac{4-2\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{9}$

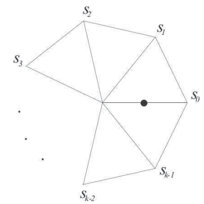
Butterfly

Maillage Triangulaire

- Sommet régulier



- Sommet non régulier

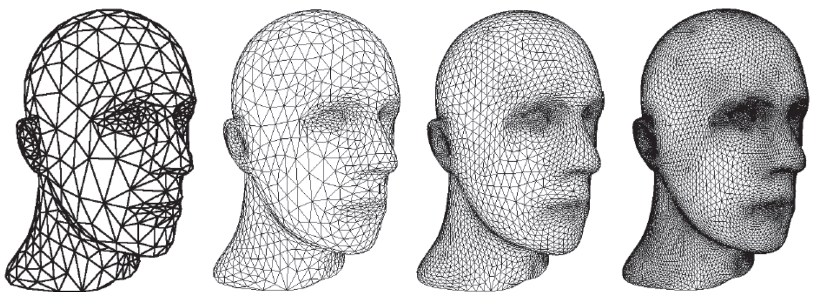


- Ajout d'un point par coté
- Dans le cas d'un sommet non régulier :
  $s_i = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{4} + \cos\left(\frac{2\pi}{k}\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{4\pi}{k}\right)\right)$ pour $k > 5$
  $s_0 = \frac{5}{12}, s_{1,2} = -\frac{1}{12}$ pour $k = 3$
  $s_0 = \frac{3}{8}, s_2 = -\frac{1}{8}, s_{1,3} = 0$ pour $k = 4$.

Maillage avancé

$\sqrt{3}$-Kobbelt

- C^2 sauf au sommets extra-ordinaires
- Schema d'approximation
- Subdivision de face
- Subdivision de triangles

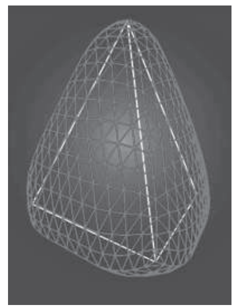


[Kobbelt, SIGGRAPH 00]

Maillage avancé

Butterfly

- C^1 sauf au sommets extra-ordinaires
- Schema d'interpolation
- Subdivision de face
- Subdivision de triangles

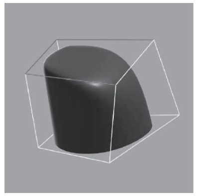


Maillage avancé

Subdivision : Arêtes vives

- Ne pas lisser toutes les arêtes :

  [De Rose, Kass, Truong. **Subdivision Surfaces in Character Animation**. *ACM SIGGRAPH*. 1998]

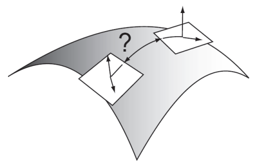


©Pixar, Gery's Game

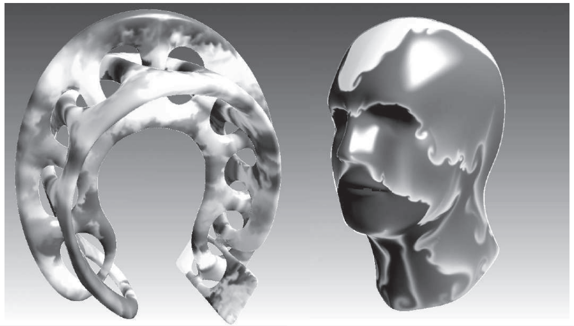
Lissage Laplacien

- Soit f définie sur une varieté différentielle (surface lisse).

$$f : \begin{cases} \Gamma & \rightarrow & \mathbb{R}^N \\ (\xi_1, \xi_2) & \mapsto & f(\xi_1, \xi_2) \end{cases}$$



- Calcul différentiel ?
- Problème : Comparer vecteurs dans différents espaces



Lissage Laplacien

Calcul différentiel sur variété

- Opérteur de Laplace-Beltrami = Laplacien sur une variété

$$\triangle = \frac{1}{\sqrt{\det(\mathrm{I}_\Gamma)}} \sum_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(\sqrt{\det(\mathrm{I}_\Gamma)} \sum_j \mathrm{I}_\Gamma^{ij} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \right)$$

- Cas particulier : Laplacien des propres coordonnées ! $f = \mathbf{x}(\xi_1, \xi_2) = (x(\xi_1, \xi_2), y(\xi_1, \xi_2), z(\xi_1, \xi_2))$
- $\mathrm{Sp}(\Delta \mathbf{x})$ = **modes de vibrations propres** = Base de Fourier *Théorie Spectrale*

[Vallet, Levy, Eurographics 08]

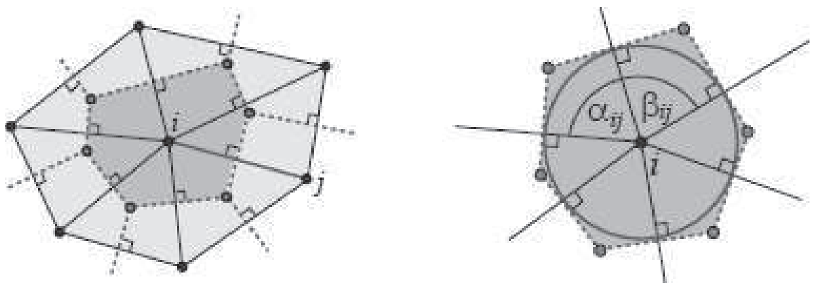
Lissage Laplacien

- Filtre passe bas = Convolution par filtre Gaussian en 2D = Solution de l'equation de diffusion (voir *Scale Space theory*).

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \triangle \mathbf{x}$$

- Comment approximer $\triangle$ sur un maillage ?
  $\Rightarrow$ Plusieurs solutions, aucune parfaite.

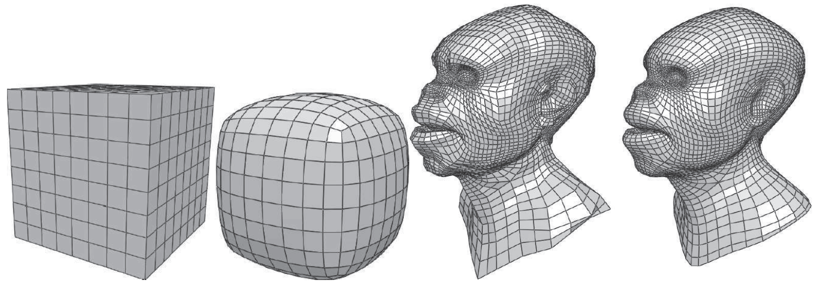
  [Wardetzky, Mathur, Kalberer, Grinspun. **Discrete Laplace Operators : No Free Lunch.** *SGP* 07]



Lissage Laplacien

- Algorithme du lissage laplacien :

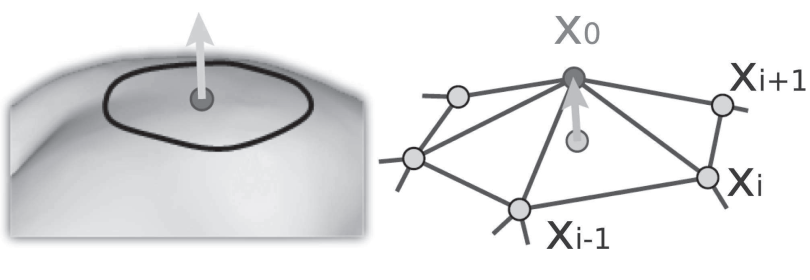
$$\mathbf{x}^{k+1} = \mu \text{bar} + (1-\mu)\mathbf{x}^k$$



Lissage Laplacien

- Approximation la plus simple :

$$\triangle \mathbf{x}(\mathbf{x}_0) \simeq \frac{1}{N}\sum_i (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0) = \text{bar} - \mathbf{x}_0$$



[Sorkine, Eurographics 05]