

# Maillage avancé

[damien.rohmer@cpe.fr](mailto:damien.rohmer@cpe.fr)

- Caractéristiques topologiques.
- Structure de données avancées : Halfedge.
- Subdivision de maillage.
- Notion de calcul sur variété : Lissage Laplacien.

# Caractéristique topologique

# Caractéristique d'Euler-Poincaré

- Maillage à  $N_f$  faces,  $N_s$  sommets,  $N_a$  arêtes.

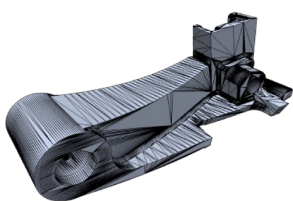
$$N_s - N_a + N_f = \chi = 2(c - g) - b$$

$\chi$  : Caractéristique d'Euler (Rappel : Gauss-Bonnet).

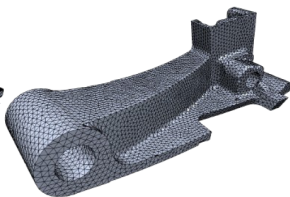
$c$  : Nbr composante connexes

$g$  : Nbr de trous (genre topologique)

$b$  : Nbr de bords



Hetroy



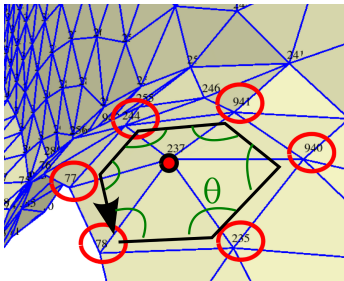
Wikipedia

# Structure de données

# Limitation encodage indexé

## Encodage géométrie + connectivité indexée

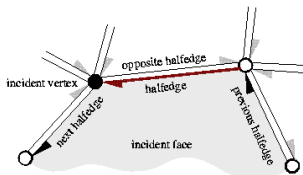
- + Affichage rapide (si contigu)
- + Générique
- + Simple
- Voisinage non encodé
- Ajout/suppression en  $\mathcal{O}(N)$ .



```
OFF
40 95 75
-0.175114 -0.047799 -0.045492
-0.199566 0.730914 -0.064795
-0.010689 0.674496 0.008900
-0.015538 0.153071 0.107408
-0.070148 0.767894 -0.116107
-0.053836 -0.792815 0.109714
-0.162416 -0.785481 0.088014
-0.112365 -0.792492 0.135482
-0.240928 0.031451 0.031966
-0.259289 0.209557 0.035420
0.296891 -0.707385 0.143375
-0.190129 -0.069002 0.109358
-0.010148 0.024179 -0.067283
-0.112968 -0.009127 0.092391
-0.185828 0.377372 -0.111155
3 20 4 1
3 34 11 13
3 12 30 0
3 30 13 17
3 23 22 21
3 29 38 17
3 32 0 13
3 14 0 37
3 24 4 21
3 14 32 1
3 24 2 22
3 3 12 25
3 4 24 15
3 21 15 26
3 35 34 13
3 19 32 13
3 19 13 27
```

# Encodage Halfedge

- Encodage Demi-Arêtes (Halfedge)
- Encodage des arêtes : On retrouve les faces par parcours (variété).
- Ajout/suppression en  $\mathcal{O}(1)$ .



| Vertex                     |
|----------------------------|
| Halfedge_handle halfedge() |

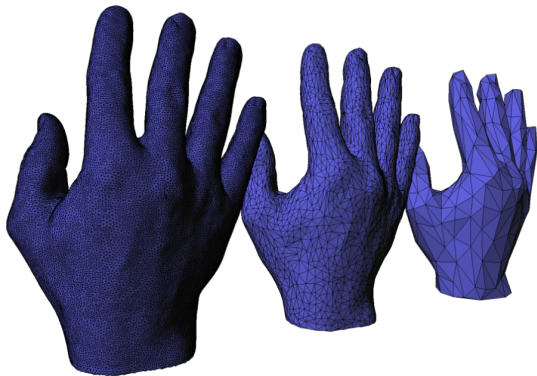
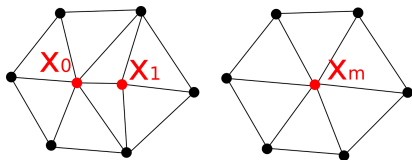
| Halfedge                   |
|----------------------------|
| Halfedge_handle opposite() |
| Halfedge_handle next()     |
| Halfedge_handle prev()     |
| Vertex_handle vertex()     |
| Face_handle face()         |

| Face                       |
|----------------------------|
| Halfedge_handle halfedge() |

CGAL

# Edge Collapse

- Suppression d'arête (edge collapse) = Base de la simplification de maillage



CGAL



Choisir la structure la plus adaptée :

## ■ Tableaux d'indices (vecteurs contigus)

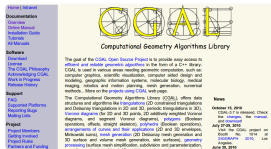
- + Simple, général, adapté GPU.
- + Accès aléatoire  $\mathcal{O}(1)$ .
- Parcours voisinage en  $\mathcal{O}(N)$ .
- Ajout/Suppression  $\mathcal{O}(N)$ .

## ■ Halfedge

- + Parcours voisinage en  $\mathcal{O}(1)$ .
- + Ajout/Suppression en  $\mathcal{O}(1)$ .
- Technique, variété uniquement, encodage non contigu.
- Accès aléatoire en  $\mathcal{O}(N)$ .

```
Halfedge_handle g = h->next()->opposite()->next();
P.split_edge( h->next());
P.split_edge( g->next());
P.split_edge( g);
h->next()->vertex()->point() = Point( 1, 0, 1);
g->next()->vertex()->point() = Point( 0, 1, 1);
g->opposite()->vertex()->point() = Point( 1, 1, 0);
Halfedge_handle f = P.split_facet( g->next(),
                                   g->next()->next()->next());
Halfedge_handle e = P.split_edge( f);
e->vertex()->point() = Point( 1, 1, 1);
P.split_facet( e, f->next()->next());
```

# Libraries implémentant le Halfedge



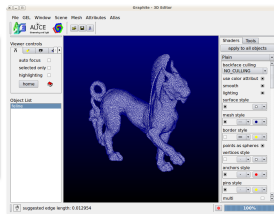
**Computational Geometry Algorithms Library**

The goal of the CGAL, Open Source Project is to provide easy access to efficient and reliable geometric algorithms in the form of a C++ library. CGAL is used in various areas ranging from geometric computation, such as computer graphics, scientific visualization, computer-aided design and modeling, geographic information systems, molecular biology, medical imaging, robotics and motion planning, mesh generation, hierarchical methods. More on the project using CGAL web page.

**News**

October 16, 2008  
CGAL 3.10 released. Check the [news](#) for details.

July 20th, 2005  
The CGAL impact on [Linux](#), [Mac OS X](#), [Windows](#), [Android](#), [iOS](#), [Linux](#), [Android](#), [iOS](#), [Linux](#), [Android](#), [iOS](#).

introduction page.' Below this, there is a 'News' section with the text 'Monday 08. of March 2010 OpenMesh 2.0-RC5' and 'Download 2.0-RC5 for Linux or Windows. The details are available.' At the bottom right, there is the RWTH Aachen University logo." data-bbox="654 261 913 489"/>

Computer Sciences 8  
Computer Graphics & Multimedia  
Prof. Dr. Leif Kobbelt

**OpenMesh.org**

Welcome to the OpenMesh website!

OpenMesh is a generic and efficient data structure for representing and manipulating polygonal meshes. For more information about OpenMesh and its features take a look at the [introduction page](#).

On top of OpenMesh we develop a flexible primary modeling and processing framework based on OpenMesh. For more details visit the [OpenFlipper website](#).

**News**

Monday 08. of March 2010 OpenMesh 2.0-RC5

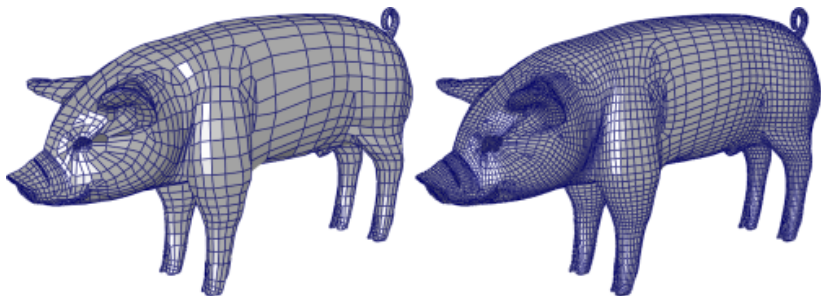
Download 2.0-RC5 for Linux or Windows. The details are available.

- CGAL (C++ complexe, calcul exact, beaucoup d'algos)
- Graphite (remaillage, paramétrisation, GUI)
- OpenMesh (plus simple que CGAL, moins complet)

# Subdivision

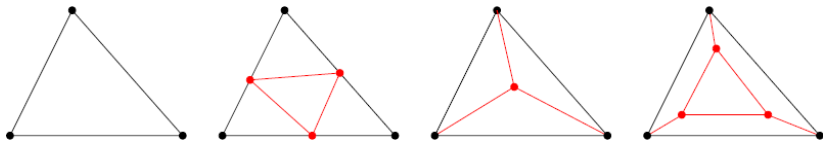
# Subdivision de maillage

- Raffiner pour : rendu, calcul, déformer, . . .
- Voir cours SIGGRAPH



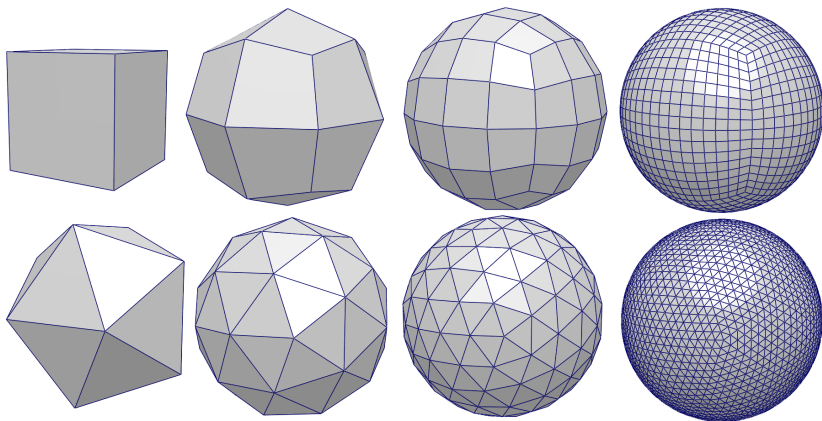
# Subdivision de maillage

- Subdivision de la connectivité.
- Plusieurs possibilités de subdivision.



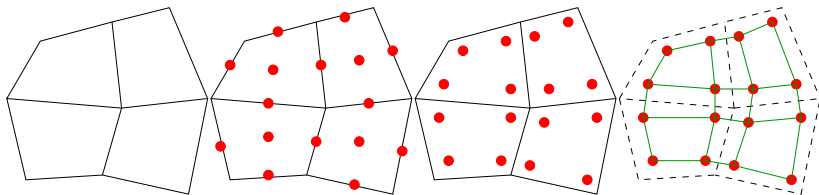
- Présences de polygones quelconques ...
- Structure de données !
- Géométrie
  - Schémas interpolants
  - Schémas approximants

- Application à la génération d'une sphère par projection :

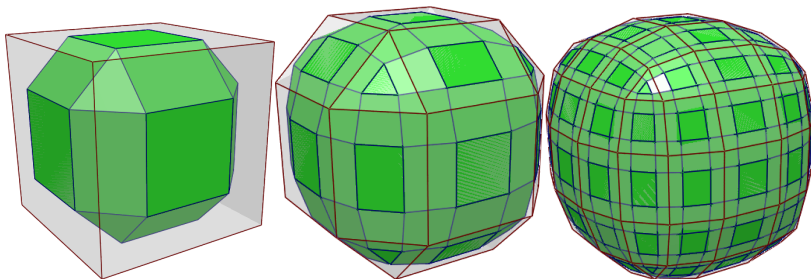


## Exemple : Doo-Sabin

- 1 Soit une face formée par  $(x_i)_{i=\llbracket 0, N-1 \rrbracket}$ .
- 2 Construit sommets milieux  $m_i = (x_i + x_{i+1})/2$ .
- 3 Barycentre de la face  $b = (\sum_i x_i)/N$ .
- 4 Nouveaux sommets =  $n_i = (x_i + m_i + m_{i-1} + b)/4$ .



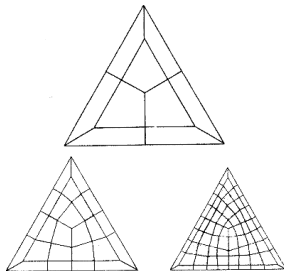
Exemple : Doo-Sabin





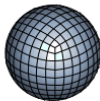
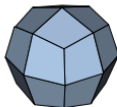
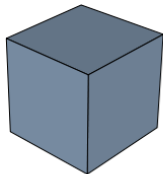
- Un sommet de face = barycentre de l'ancienne face
- Un sommet d'arête = moyenne entre le milieu des anciens sommets et le milieu des faces partageant l'arête
- Nouvelle position du sommet =  $\frac{Q+2R+S(n-3)}{n}$

- Q : Moyenne des sommets de face adjacents
- R : Moyenne des points milieux des arêtes incidentes
- S : Anciennes coordonnées
- n : valence



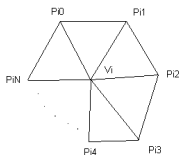
# Catmull-Clark Resultats

- $C^2$  sauf au sommets extra-ordinaires
- Schema d'approximation
- Subdivision de face
- Basé de préférence sur des quads



## Maillage Triangulaire

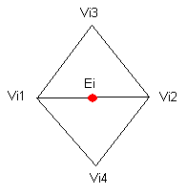
### ■ Nouvelle Position



$$V^{i+1} = (1 - n\alpha)V^i + \alpha \sum_{k=0}^n P_k$$

$$\alpha = \frac{1}{n} \left( \frac{5}{8} - \left( \frac{3}{8} - \frac{1}{4} \cos \left( \frac{2\pi}{n} \right) \right)^2 \right)$$

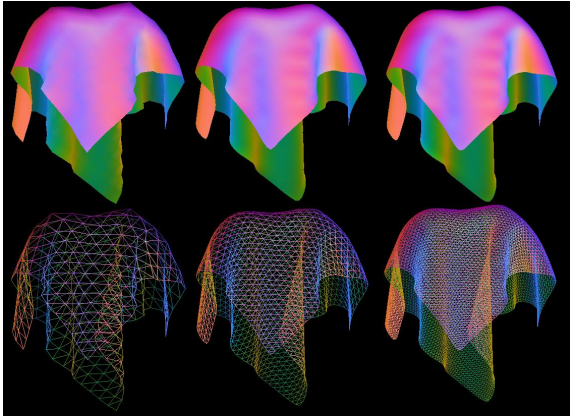
### ■ Sommets d'arêtes



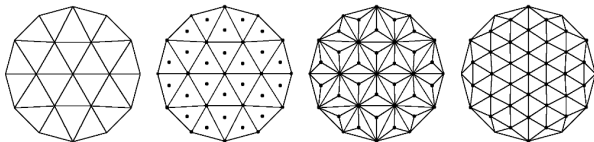
$$E^{i+1} = \frac{3}{8}(V_1 + V_2) + \frac{1}{8}(V_3 + V_4)$$

# Loop

- $C^2$  sauf au sommets extra-ordinaires
- Schema d'approximation
- Subdivision de face
- Subdivision de triangles



## Maillage Triangulaire

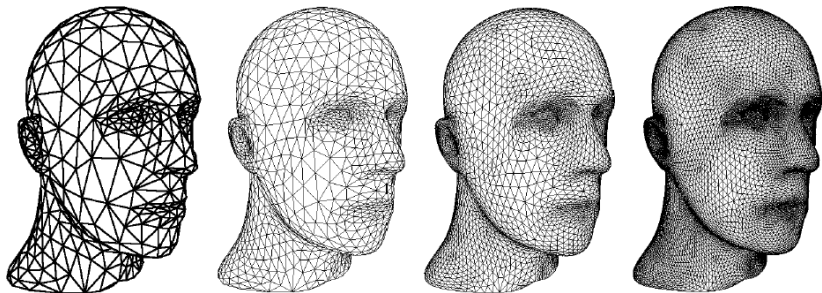


- Nouveaux sommets : barycentre de l'ancienne face
- Nouvelle position du sommet  $i$  :

$$(1 - \alpha_n)p_i + \frac{\alpha_n}{n} \sum_{j \in \mathcal{V}_i} p_j \quad (n=\text{valence}, \mathcal{V}=\text{voisinage})$$

$$\text{et } \alpha_n = \frac{4 - 2 \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{9}$$

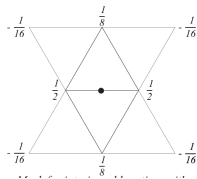
- $C^2$  sauf au sommets extra-ordinaires
- Schema d'approximation
- Subdivision de face
- Subdivision de triangles



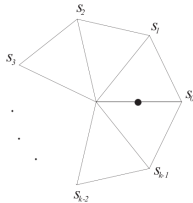
[Kobbelt, SIGGRAPH 00]

## Maillage Triangulaire

### ■ Sommet régulier



### ■ Sommet non régulier



### ■ Ajout d'un point par coté

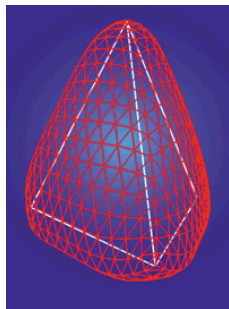
### ■ Dans le cas d'un sommet non régulier :

$$s_j = \frac{1}{k} \left( \frac{1}{4} + \cos \left( \frac{2\pi}{k} \right) + \frac{1}{2} \cos \left( \frac{4\pi}{k} \right) \right) \quad \text{pour } k > 5$$

$$s_0 = \frac{5}{12}, s_{1,2} = -\frac{1}{12} \quad \text{pour } k = 3$$

$$s_0 = \frac{3}{8}, s_2 = -\frac{1}{8}, s_{1,3} = 0 \quad \text{pour } k = 4.$$

- $C^1$  sauf au sommets extra-ordinaires
- Schema d'interpolation
- Subdivision de face
- Subdivision de triangles

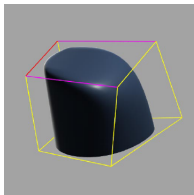




# Subdivision : Arêtes vives

- Ne pas lisser toutes les arêtes :

[De Rose, Kass, Truong.  
**Subdivision Surfaces in  
Character Animation.** *ACM  
SIGGRAPH.* 1998]

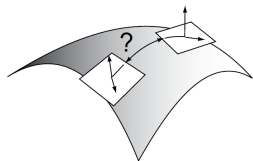


# Lissage Laplacien

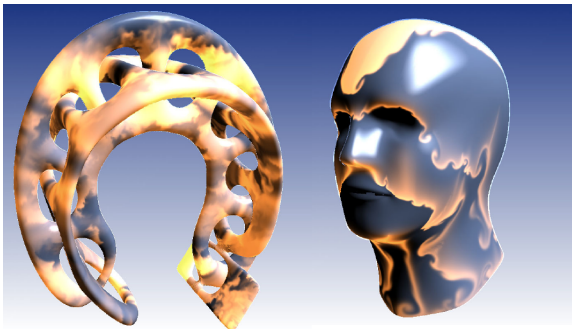
# Lissage Laplacien

- Soit  $f$  définie sur une variété différentielle (surface lisse).

$$f : \begin{cases} \Gamma & \rightarrow \mathbb{R}^N \\ (\xi_1, \xi_2) & \mapsto f(\xi_1, \xi_2) \end{cases}$$



- Calcul différentiel ?
- Problème : Comparer vecteurs dans différents espaces



- Opérateur de Laplace-Beltrami = Laplacien sur une variété

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{\det(I_\Gamma)}} \sum_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left( \sqrt{\det(I_\Gamma)} \sum_j I_\Gamma^{ij} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \right)$$

- Cas particulier : Laplacien des propres coordonnées !  
 $f = \mathbf{x}(\xi_1, \xi_2) = (x(\xi_1, \xi_2), y(\xi_1, \xi_2), z(\xi_1, \xi_2))$
- $\text{Sp}(\Delta \mathbf{x}) =$  **modes de vibrations propres** = Base de Fourier  
*Théorie Spectrale*



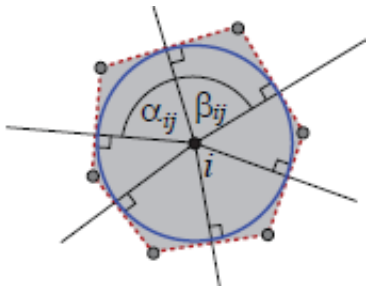
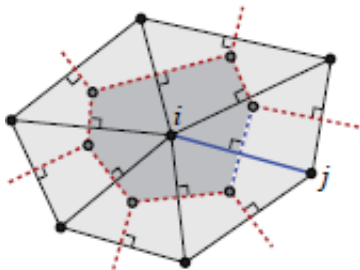
# Lissage Laplacien

- Filtre passe bas = Convolution par filtre Gaussien en 2D = Solution de l'équation de diffusion (voir *Scale Space theory*).

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \Delta \mathbf{x}$$

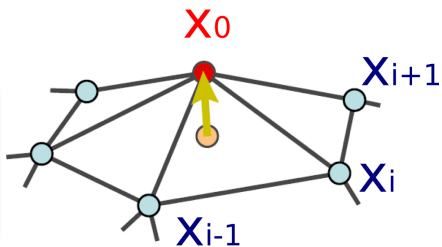
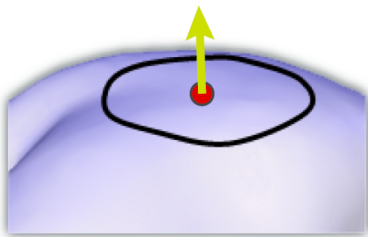
- Comment approximer  $\Delta$  sur un maillage ?  
⇒ Plusieurs solutions, aucune parfaite.

[Wardetzky, Mathur, Kalberer, Grinspun. **Discrete Laplace Operators : No Free Lunch.** *SGP 07*]



- Approximation la plus simple :

$$\Delta \mathbf{x}(\mathbf{x}_0) \simeq \frac{1}{N} \sum_i (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0) = \text{bar} - \mathbf{x}_0$$



[Sorkine, Eurographics 05]

- Algorithme du lissage laplacien :

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mu \bar{\mathbf{x}} + (1 - \mu) \mathbf{x}^k$$

