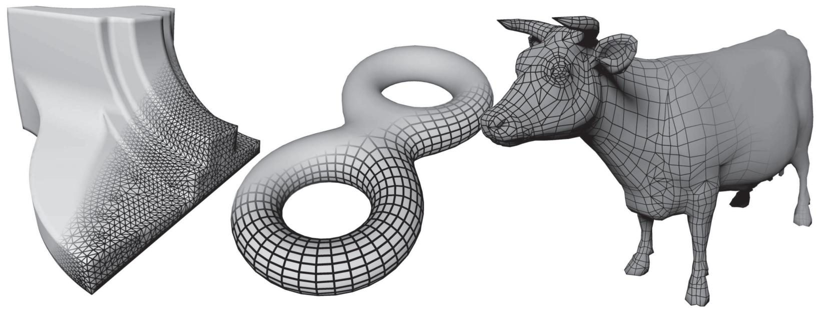
Maillage

damien.rohmer@cpe.fr

Maillage

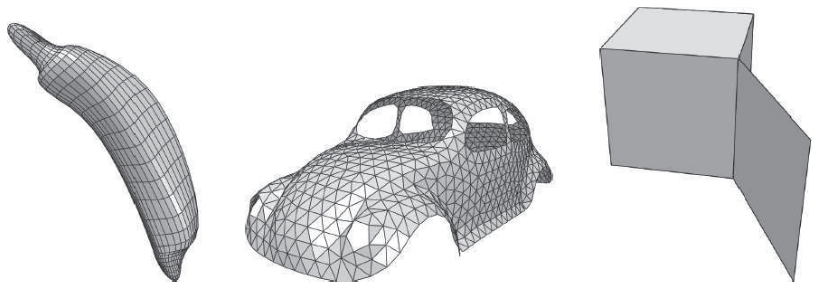
- Maillage (Mesh) = Ensemble de **polygones** partageants certains sommets
- N_f **faces**, N_s **sommets** (vertices), N_e **arêtes** (edges).
- **Triangulation** : toutes les faces sont des triangles.
- **Quad-mesh** : toutes les faces sont des quads.
- Poly-mesh : mélange de types.



Plan du cours

Topologie

- Rappel : Surface variété (Manifold) ssi le voisinage de tout point est homéomorphe à un (demi) disque.
  $\Rightarrow$ Toute arête est partagée par au plus 2 faces (connectivitée) + non auto-intersection (plongement).



Maillage

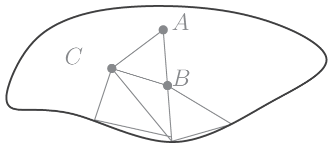
- Poly-mesh = cas particulier de triangulation
- Rappel : Triangulation = Mapping linéaire S

$$S_i : \begin{cases} \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \mapsto S_i(u,v) = u\,\overrightarrow{AB} + v\,\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{OA} \end{cases}$$

$$\mathcal{D} : (u,v) \in [0,1]^2, 0 \leq u+v \leq 1$$

Propriétés :

- Surface globalement $\mathcal{G}^0$.
- Surface jamais $\mathcal{G}^1$ (sauf plan).
- **Interpolation linéaire** de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^3$ (normales, couleurs, textures).



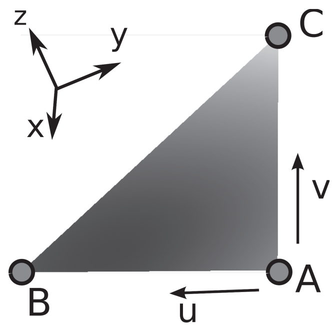
Interpolation linéaire

- Interpolation de couleurs

$$\begin{cases} r(u,v) & = (1-u-v)r_A + ur_B + vr_C \\ g(u,v) & = (1-u-v)g_A + ug_B + vg_C \\ b(u,v) & = (1-u-v)b_A + ub_B + vb_C \end{cases}$$

- Dans le cas général pour une fonction f

$$f(u,v) = (1-u-v)f_A + uf_B + vf_C$$



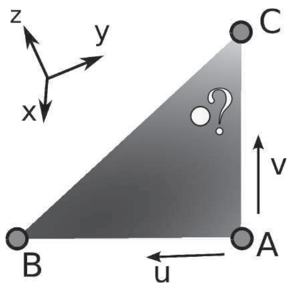
Coordonnées dans un triangle

- Position du point **p** par rapport aux sommets (A,B,C) ?

$$\overrightarrow{AP} = u\,\overrightarrow{AB} + v\,\overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow P - A = u\,(B-A) + v\,(C-A)$$

$$\Rightarrow P = \underbrace{(1-u-v)}_{w}\,A + u\,B + v\,C\,.$$



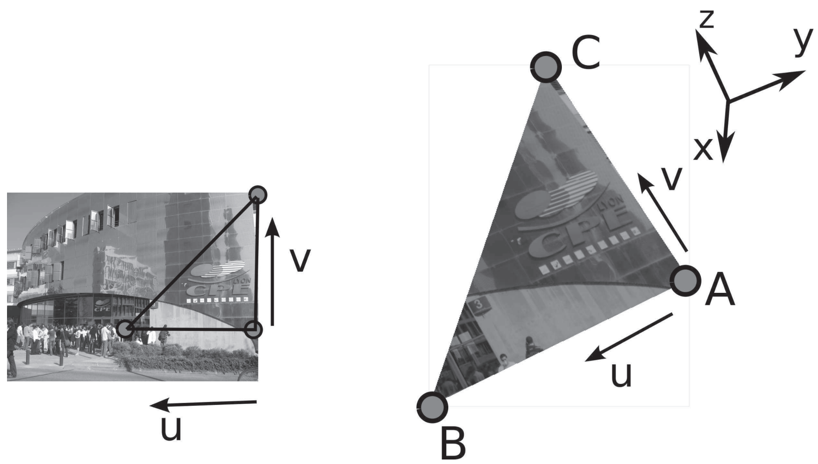
- (u,v,w)=Coordonnées barycentriques

$$\begin{cases} P = w\,A + u\,B + v\,C \\ u + v + w = 1 \\ 0 \leq (u,v,w) \leq 1\,. \end{cases}$$

Interpolation linéaire

- On peut interpoler des coordonnées !
  $\Rightarrow$ Textures

$$\begin{cases} t_x = (1-u-v)\,t_x(A) + u\,t_x(B) + v\,t_x(C) \\ t_y = (1-u-v)\,t_y(A) + u\,t_y(B) + v\,t_y(C) \end{cases}$$



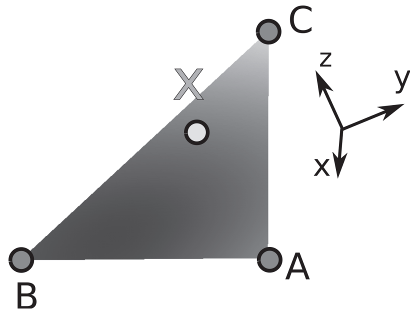
Coordonnées barycentriques

- Étant donné un point $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$: connaitre (α, β, γ) tel que $\mathbf{x} = \alpha \mathbf{x}_A + \beta \mathbf{x}_B + \gamma \mathbf{x}_C$, $(\alpha + \beta + \gamma = 1)$.
  $\Rightarrow$ coordonnées barycentriques.

$$\begin{cases} A = aire(\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A, \mathbf{x}_C - \mathbf{x}_A) \\ A_1 = aire(\mathbf{x}_C - \mathbf{x}_B, \mathbf{x} - \mathbf{x}_B) \\ A_2 = aire(\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_C, \mathbf{x} - \mathbf{x}_C) \\ A_3 = aire(\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A, \mathbf{x} - \mathbf{x}_A) \end{cases}$$

avec $aire(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1) = 1/2 \|\mathbf{v}_0 \times \mathbf{v}_1\|$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = A_1 / A \\ \beta = A_2 / A \\ \gamma = A_3 / A \end{cases}$$



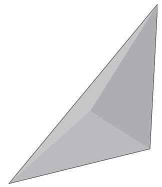
Maillage

Structure de données :

- *Ex. Représenter un tetraèdre* :

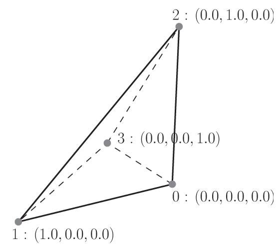
Idée 1 :

```
(0.0,0.0,0.0),(1.0,0.0,0.0),(0.0,0.0,1.0)
(0.0,0.0,0.0),(0.0,0.0,1.0),(0.0,1.0,0.0)
(0.0,0.0,0.0),(0.0,1.0,0.0),(1.0,0.0,0.0)
(0.0,1.0,0.0),(0.0,0.0,1.0),(1.0,0.0,0.0)
```



Il y a mieux :

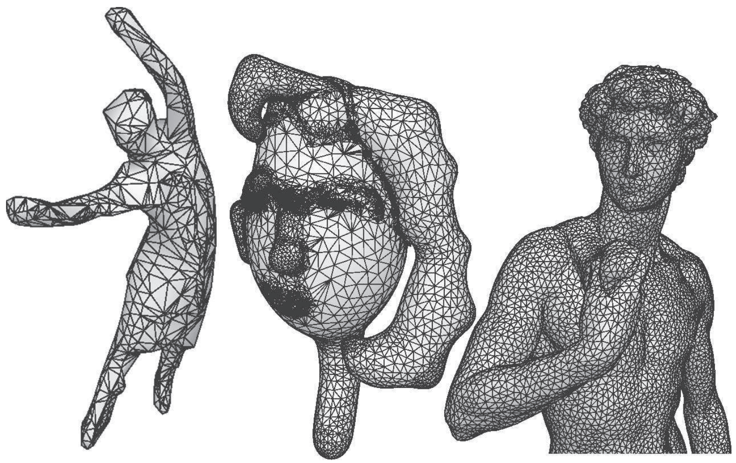
```
coordonnees:
(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)
Connectivite
(0,1,3)
(0,3,2)
(0,2,1)
(1,2,3)
```



Qualité d'un maillage

- Triangulation : $\theta_{\text{min}} \simeq 30°$
- Quads : $\theta_{\text{min}} \simeq 45°$

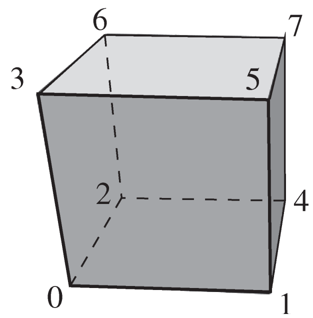
Application : Calculs (FEM), (Rendu)



Format off

Exemple de format d'echange. Format off.

```
OFF
8 6 12
0 0 0
1 0 0
0 1 0
0 0 1
1 1 0
1 0 1
0 1 1
1 1 1
4 0 1 4 2
4 1 5 7 4
4 3 6 7 5
4 2 6 3 0
4 2 4 7 6
4 0 3 5 1
```



Structure de données

- Vecteurs contigüs dans la mémoire : Affichage rapide en openGL.

```
//(x0,y0,z0,x1,y1,z1,...)
std::vector <double> vertex

//(i00,i01,i02,i10,i11,i12,...)
std::vector <int> connectivity

std::vector <double> normal, color, texture ...
```

- Accès à la coordonnée y du sommet k.

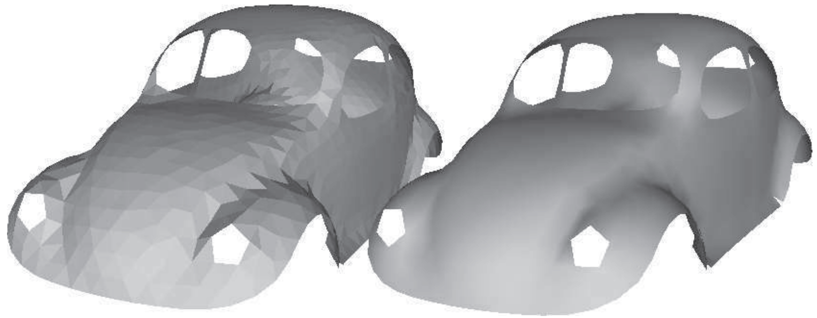
  `vertex[3*k+1]`

- Accès à la coordonnée y du sommet s(1,2 ou 3) du triangle t.

  `vertex[3*connectivity[3*t+s]+1]`

Normales

- En OpenGL : 1 Normale interpolé par sommets
  $\Rightarrow$ Normale par polygone = Plusieurs normales par sommet

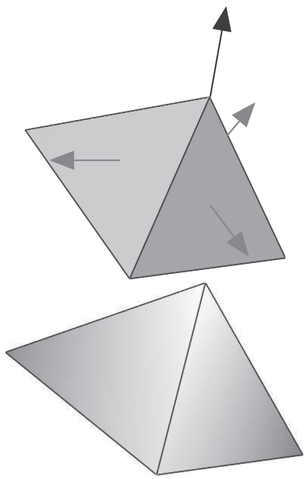


Normale d'un maillage

- Aspect lisse
  $\Rightarrow$ 1 normale par sommet.
- Moyenne de normales (faux mais répandue)

$$\mathbf{n}_k = \frac{\sum_{i \in \mathcal{V}(k)} \mathbf{n}_i}{\left\| \sum_{i \in \mathcal{V}(k)} \mathbf{n}_i \right\|}$$

k : indice sommet
i : indice face
$\mathcal{V}(k)$: faces voisines du sommet k

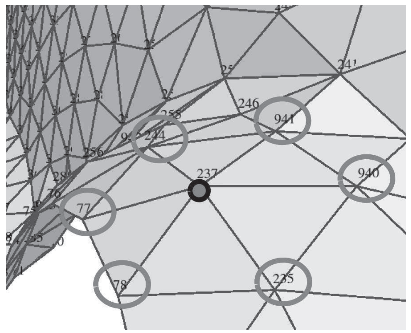


Structure de données : Voisinage

- **1-Voisinage** = Sommets voisins d'un sommet donné

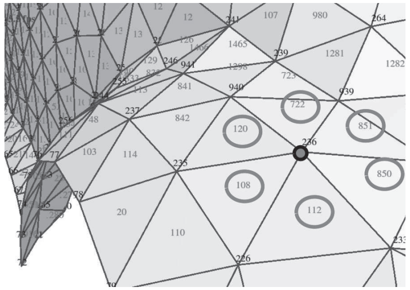
```
std::vector <std::vector <int> > one_ring

// exemple pour le cube:
one_ring[0] = [1,2,3]
one_ring[1] = [5,4,0]
...
```



Voisinage

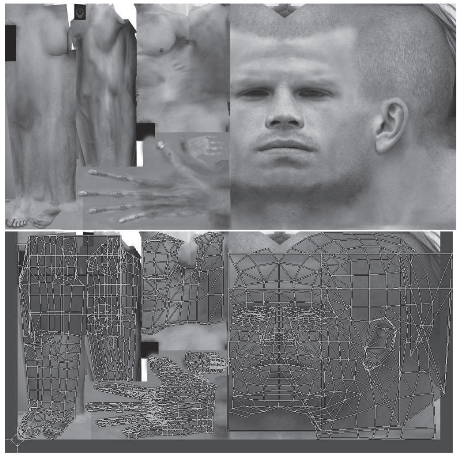
- Triangles voisins d'un autre
- Triangles voisins d'un point : etoilé (1-star)
  ⇒ calcul des normales !

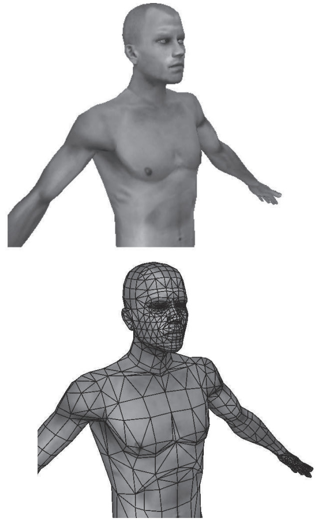


! Attention aux structures de données.
Compromis entre : temps accès / temps recherche / espace memoire / facilité ...

Textures

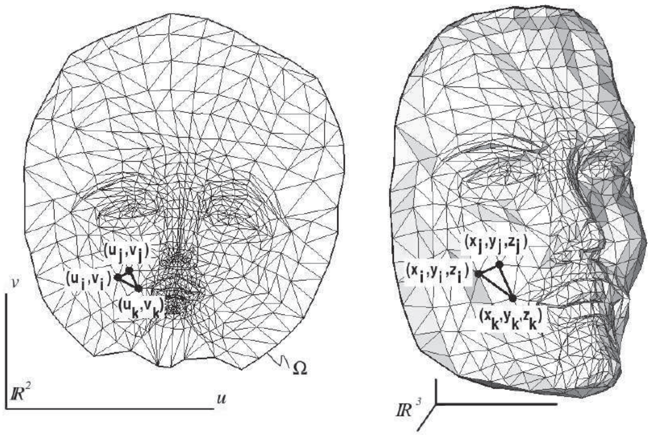
- Morceaux se recouvrants = atlas (charts).





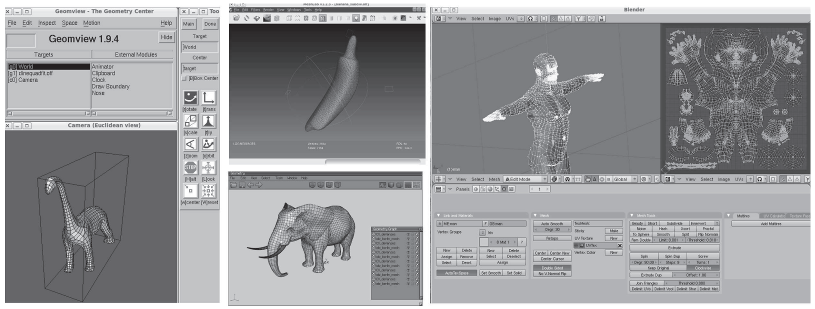
Parametrisation / Textures

- Paramétrisation d'un maillage = Construction de S (par morceaux) étant donné Γ.



[Botsh, Pauly, Kobbelt, Alliez, Lévy, SIGGRAPH Course Notes 2007]

Softwares



- Geomview (Viewer)
- Meshlab (Mesh Processing)
- Wings3D (Subdivision)
- Blender (Artiste)