

Maillage avancé

IMI, CPE Lyon

- Caractéristiques topologiques.
- Structure de données avancées : Halfedge.
- Subdivision de maillage.
- Notion de calcul sur variété : Lissage Laplacien.

Caractéristique topologique

Caractéristique d'Euler-Poincaré

- Maillage à N_f faces, N_s sommets, N_a arêtes.

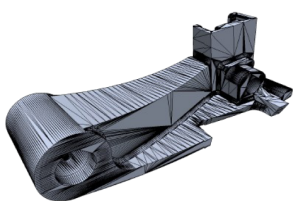
$$N_s - N_a + N_f = \chi = 2(c - g) - b$$

χ : Caractéristique d'Euler (Rappel : Gauss-Bonnet).

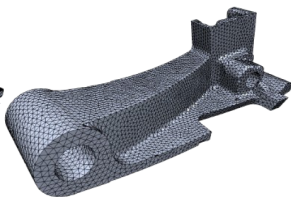
c : Nbr composante connexes

g : Nbr de trous (genre topologique)

b : Nbr de bords



Hetroy



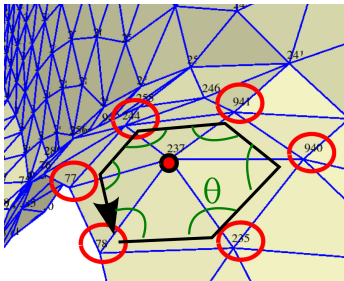
Wikipedia

Structure de données

Limitation encodage indexé

Encodage géométrie + connectivité indexée

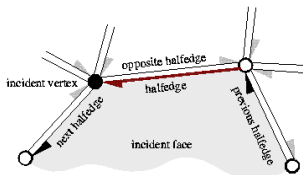
- + Affichage rapide (si contigu)
- + Générique
- + Simple
- Voisinage non encodé
- Ajout/suppression en $\mathcal{O}(N)$.



```
OFF
40 95 75
-0.175114 -0.047799 -0.045492
-0.199566 0.730914 -0.064795
-0.010689 0.674496 0.008900
-0.015538 0.153071 0.107408
-0.070148 0.767894 -0.116107
-0.053836 -0.792815 0.109714
-0.162416 -0.785481 0.088014
-0.112365 -0.792492 0.135482
-0.240928 0.031451 0.031966
-0.259289 0.209557 0.035420
0.296891 -0.707385 0.143375
-0.190129 -0.069002 0.109358
-0.010148 0.024179 -0.067283
-0.112968 -0.089127 0.092391
-0.185828 0.377372 -0.111155
3 20 4 1
3 34 11 13
3 12 30 0
3 30 13 17
3 23 22 21
3 29 38 17
3 32 0 13
3 14 0 37
3 24 4 21
3 14 32 1
3 24 2 22
3 3 12 25
3 4 24 15
3 21 15 26
3 35 34 13
3 19 32 13
3 19 13 27
```

Encodage Halfedge

- Encodage Demi-Arêtes (Halfedge)
- Encodage des arêtes : On retrouve les faces par parcours (variété).
- Ajout/suppression en $\mathcal{O}(1)$.



Vertex
Halfedge_handle halfedge()

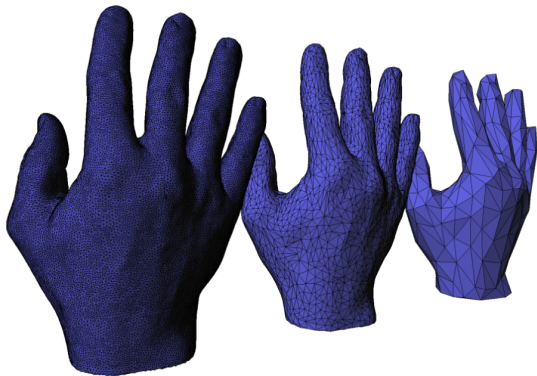
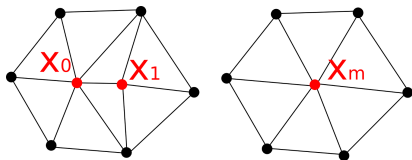
Halfedge
Halfedge_handle opposite()
Halfedge_handle next()
Halfedge_handle prev()
Vertex_handle vertex()
Face_handle face()

Face
Halfedge_handle halfedge()

CGAL

Edge Collapse

- Suppression d'arête (edge collapse) = Base de la simplification de maillage



CGAL

Choisir la structure la plus adaptée :

- Tableaux d'indices (vecteurs contigus)

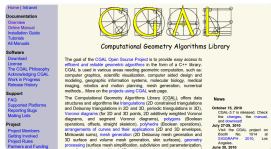
- + Simple, général, adapté GPU.
- + Accès aléatoire $\mathcal{O}(1)$.
- Parcours voisinage en $\mathcal{O}(N)$.
- Ajout/Suppression $\mathcal{O}(N)$.

- Halfedge

- + Parcours voisinage en $\mathcal{O}(1)$.
- + Ajout/Suppression en $\mathcal{O}(1)$.
- Technique, variété uniquement, encodage non contigu.
- Accès aléatoire en $\mathcal{O}(N)$.

```
Halfedge_handle g = h->next()->opposite()->next();
P.split_edge( h->next());
P.split_edge( g->next());
P.split_edge( g);
h->next()->vertex()->point() = Point( 1, 0, 1);
g->next()->vertex()->point() = Point( 0, 1, 1);
g->opposite()->vertex()->point() = Point( 1, 1, 0);
Halfedge_handle f = P.split_facet( g->next(),
                                   g->next()->next()->next());
Halfedge_handle e = P.split_edge( f);
e->vertex()->point() = Point( 1, 1, 1);
P.split_facet( e, f->next()->next());
```

Libraries implémentant le Halfedge



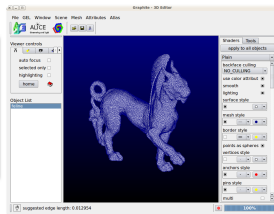
Computational Geometry Algorithms Library

The goal of the CGAL, Open Source Project is to provide easy access to efficient and reliable geometric algorithms in the form of a C++ library. CGAL is used in various areas ranging from geometric computation, such as computer graphics, scientific visualization, computer-aided design and modeling, geographic information systems, molecular biology, medical imaging, robotics and motion planning, mesh generation, hierarchical methods. More on the project using CGAL web page.

News

October 16, 2008
CGAL 3.10 released. Check the [news](#) for details.

July 20th, 2005
The new CGAL impact on [CGAL 2.10](#).

introduction page.' Below this, there is a 'News' section with the text 'Monday 08. of March 2010 OpenMesh 2.0-RC5' and a link to 'Download 2.0-RC5 for Linux or Windows. This download is available'." data-bbox="653 261 913 489"/>

Computer Sciences 8
Computer Graphics & Multimedia
Prof. Dr. Leif Kobbelt

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Home
Introduction
Documentation
Download
Contact
Participating
Bugreporting
OpenFlipper

OpenMesh.org

Welcome to the OpenMesh website!

OpenMesh is a generic and efficient data structure for representing and manipulating polygonal meshes. For more information about OpenMesh and its features take a look at the [introduction page](#).

On top of OpenMesh we develop a flexible primary modeling and processing framework based on [OpenMesh](#). For more details visit the [OpenFlipper website](#).

News

Monday 08. of March 2010 **OpenMesh 2.0-RC5**

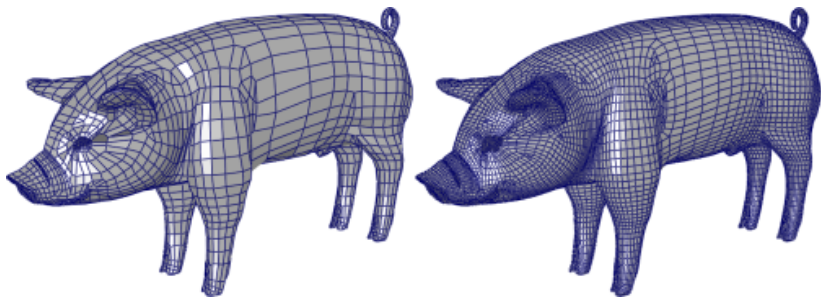
[Download 2.0-RC5 for Linux or Windows. This download is available](#)

- CGAL (C++ complexe, calcul exact, beaucoup d'algos)
- Graphite (remaillage, paramétrisation, GUI)
- OpenMesh (plus simple que CGAL, moins complet)

Subdivision

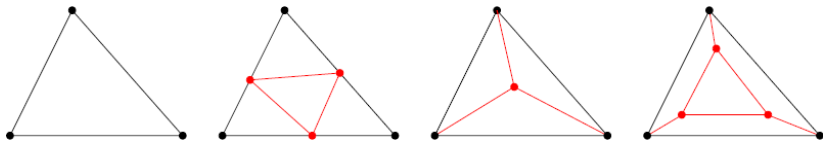
Subdivision de maillage

- Raffiner pour : rendu, calcul, déformer, . . .
- Voir cours SIGGRAPH



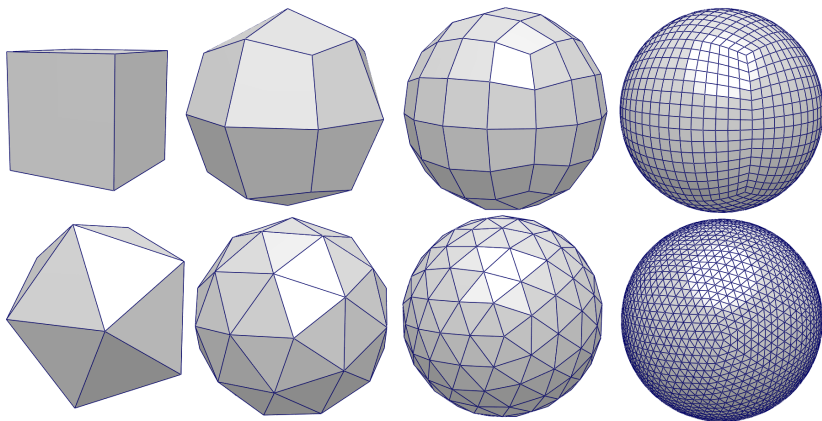
Subdivision de maillage

- Subdivision de la connectivité.
- Plusieurs possibilités de subdivision.



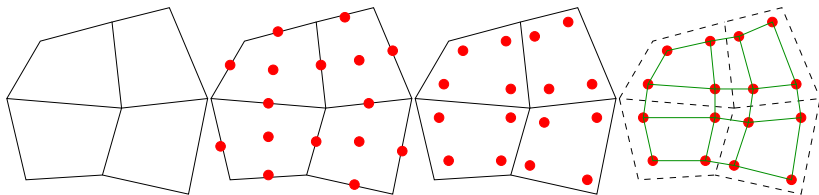
- Présences de polygones quelconques ...
- Structure de données !
- Géométrie
 - Schémas interpolants
 - Schémas approximants

- Application à la génération d'une sphère par projection :

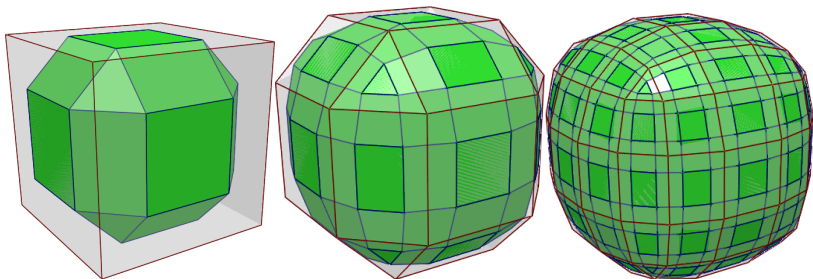


Exemple : Doo-Sabin

- 1 Soit une face formée par $(x_i)_{i=\llbracket 0, N-1 \rrbracket}$.
- 2 Construit sommets milieux $m_i = (x_i + x_{i+1})/2$.
- 3 Barycentre de la face $b = (\sum_i x_i)/N$.
- 4 Nouveaux sommets = $n_i = (x_i + m_i + m_{i-1} + b)/4$.

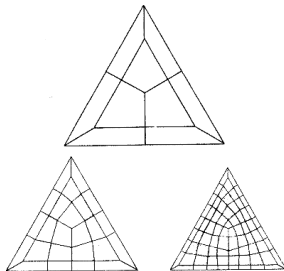


Exemple : Doo-Sabin



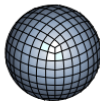
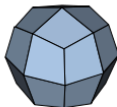
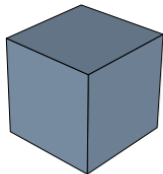
- Un sommet de face = barycentre de l'ancienne face
- Un sommet d'arête = moyenne entre le milieu des anciens sommets et le milieu des faces partageant l'arête
- Nouvelle position du sommet = $\frac{Q+2R+S(n-3)}{n}$

- Q : Moyenne des sommets de face adjacents
- R : Moyenne des points milieux des arêtes incidentes
- S : Anciennes coordonnées
- n : valence



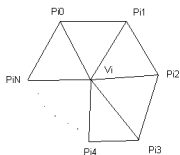
Catmull-Clark Resultats

- C^2 sauf au sommets extra-ordinaires
- Schema d'approximation
- Subdivision de face
- Basé de préférence sur des quads



Maillage Triangulaire

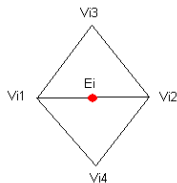
■ Nouvelle Position



$$V^{i+1} = (1 - n\alpha)V^i + \alpha \sum_{k=0}^n P_k$$

$$\alpha = \frac{1}{n} \left(\frac{5}{8} - \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{4} \cos \left(\frac{2\pi}{n} \right) \right)^2 \right)$$

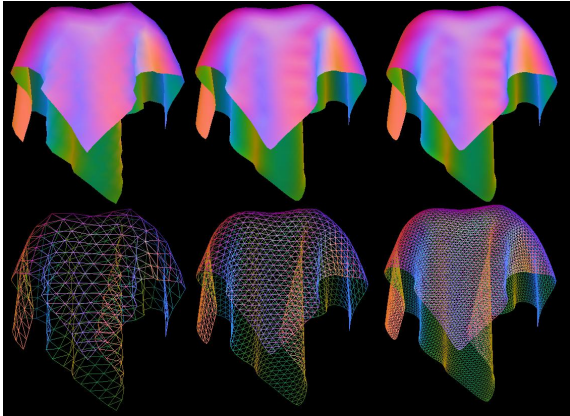
■ Sommets d'arêtes



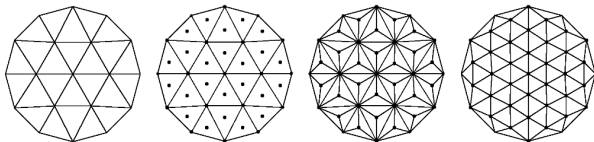
$$E^{i+1} = \frac{3}{8}(V_1 + V_2) + \frac{1}{8}(V_3 + V_4)$$

Loop

- C^2 sauf au sommets extra-ordinaires
- Schema d'approximation
- Subdivision de face
- Subdivision de triangles



Maillage Triangulaire

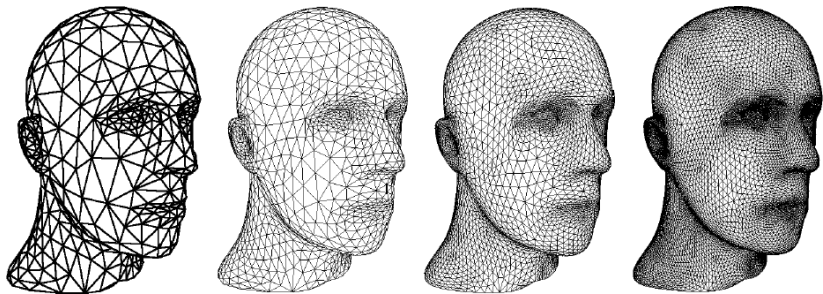


- Nouveaux sommets : barycentre de l'ancienne face
- Nouvelle position du sommet i :

$$(1 - \alpha_n)p_i + \frac{\alpha_n}{n} \sum_{j \in \mathcal{V}_i} p_j \quad (n=\text{valence}, \mathcal{V}=\text{voisinage})$$

$$\text{et } \alpha_n = \frac{4 - 2 \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{9}$$

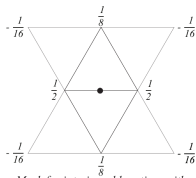
- C^2 sauf au sommets extra-ordinaires
- Schema d'approximation
- Subdivision de face
- Subdivision de triangles



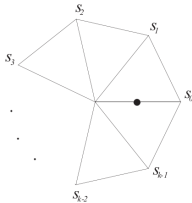
[Kobbelt, SIGGRAPH 00]

Maillage Triangulaire

■ Sommet régulier



■ Sommet non régulier



■ Ajout d'un point par coté

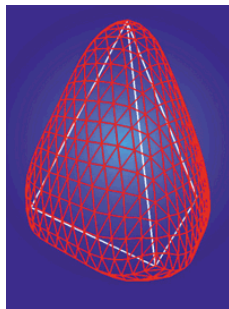
■ Dans le cas d'un sommet non régulier :

$$s_j = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{4} + \cos \left(\frac{2\pi}{k} \right) + \frac{1}{2} \cos \left(\frac{4\pi}{k} \right) \right) \quad \text{pour } k > 5$$

$$s_0 = \frac{5}{12}, s_{1,2} = -\frac{1}{12} \quad \text{pour } k = 3$$

$$s_0 = \frac{3}{8}, s_2 = -\frac{1}{8}, s_{1,3} = 0 \quad \text{pour } k = 4.$$

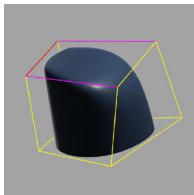
- C^1 sauf au sommets extra-ordinaires
- Schema d'interpolation
- Subdivision de face
- Subdivision de triangles



Subdivision : Arêtes vives

- Ne pas lisser toutes les arêtes :

[De Rose, Kass, Truong.
**Subdivision Surfaces in
Character Animation.** *ACM
SIGGRAPH.* 1998]

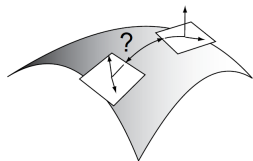


Lissage Laplacien

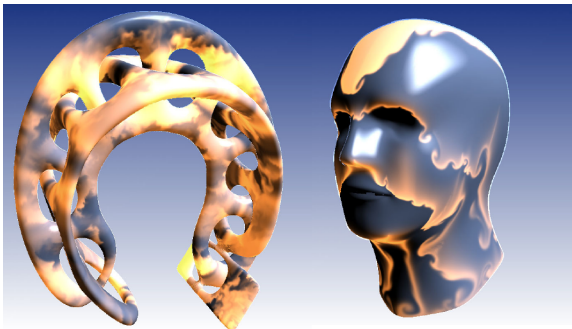
Lissage Laplacien

- Soit f définie sur une variété différentielle (surface lisse).

$$f : \begin{cases} \Gamma & \rightarrow \mathbb{R}^N \\ (\xi_1, \xi_2) & \mapsto f(\xi_1, \xi_2) \end{cases}$$



- Calcul différentiel ?
- Problème : Comparer vecteurs dans différents espaces



- Opérateur de Laplace-Beltrami = Laplacien sur une variété

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{\det(I_\Gamma)}} \sum_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(\sqrt{\det(I_\Gamma)} \sum_j I_\Gamma^{ij} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \right)$$

- Cas particulier : Laplacien des propres coordonnées !
 $f = \mathbf{x}(\xi_1, \xi_2) = (x(\xi_1, \xi_2), y(\xi_1, \xi_2), z(\xi_1, \xi_2))$
- $\text{Sp}(\Delta \mathbf{x}) = \mathbf{modes\ de\ vibrations\ propres} = \text{Base de Fourier}$
Théorie Spectrale



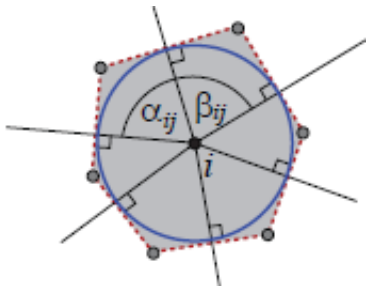
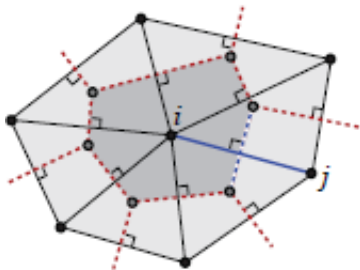
Lissage Laplacien

- Filtre passe bas = Convolution par filtre Gaussien en 2D = Solution de l'équation de diffusion (voir *Scale Space theory*).

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \Delta \mathbf{x}$$

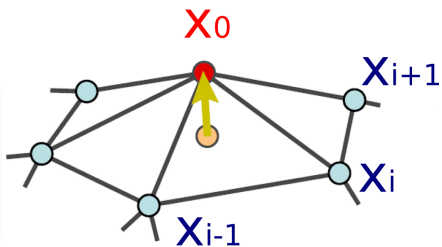
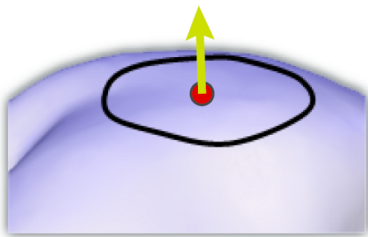
- Comment approximer Δ sur un maillage ?
⇒ Plusieurs solutions, aucune parfaite.

[Wardetzky, Mathur, Kalberer, Grinspun. **Discrete Laplace Operators : No Free Lunch.** *SGP 07*]



- Approximation la plus simple :

$$\Delta \mathbf{x}(\mathbf{x}_0) \simeq \frac{1}{N} \sum_i (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0) = \bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_0$$



[Sorkine, Eurographics 05]

- Algorithme du lissage laplacien :

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mu \bar{\mathbf{x}} + (1 - \mu) \mathbf{x}^k$$

