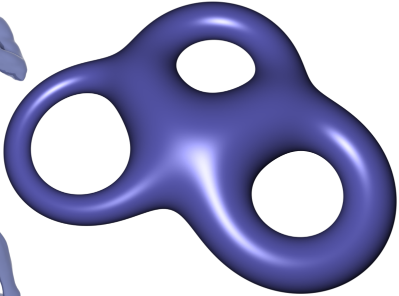
Géométrie différentielle

IMI, CPE Lyon

Notion de topologie

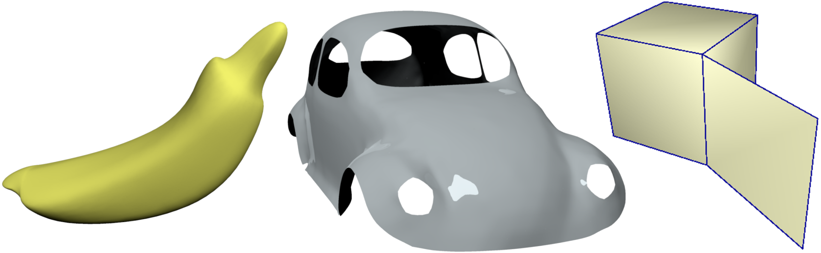
- **Topologie** = Étude de la structure d'un espace **indépendamment de sa géométrie**.

- 2 surfaces sont topologiquement équivalentes si on peut transformer l'une en l'autre par des transformations continues (pas de déchirures ni soudures).



Notion de variété

- Une surface Γ est une **2-variétée (manifold)** ssi tout point possède un voisinage **homéomorphe** à un (demi) disque.
- Homéomorphisme = application bijective continue + reciproque continue.



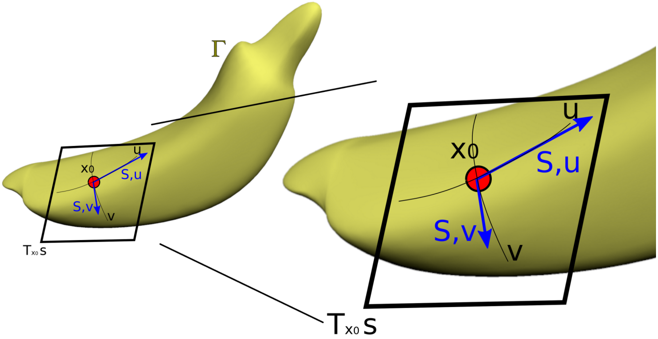
Notion de continuité

- Soit Γ la surface associée au mapping S.

$$S : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u, v) & \mapsto & S(u, v) \end{array} \right.$$

$$\Gamma = tr_{\mathcal{D}}(S) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 | \forall (u, v) \in \mathcal{D}, S(u, v) = \mathbf{x}\}$$

- S est $\mathcal{C}^1$ ssi $S_{,u}$ et $S_{,v}$ sont définies et continues.
- S est $\mathcal{C}^2$ ssi $S_{,uu}$, $S_{,vv}$ et $S_{,uv}$ sont définies et continues.



Notion de continuité

- Γ est $\mathcal{G}^1$ si il existe un plan tangent partout.
- Γ est $\mathcal{G}^2$ si sa courbure est continue partout.

Remarque $S \subset \mathcal{C}^k \neq \Gamma \subset \mathcal{G}^k$.

$\mathcal{G}^2$ nécessaire pour reflets.

Exemple de continuité

$$f : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t \end{cases}, t \in [-1, 0[\quad \text{et} \quad \begin{cases} x(t) = t/2 \\ y(t) = t/2 \end{cases}, t \in [0, 2]$$

- f est-elle $\mathcal{C}^2$? $\mathcal{G}^2$?

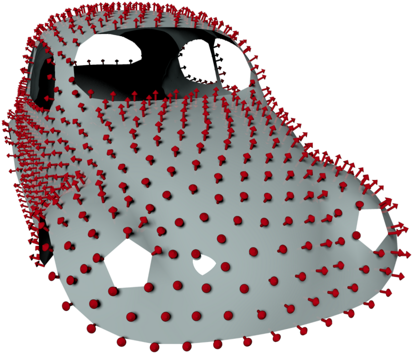
$$g : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \end{cases}, t \in [-1, 0[\quad \text{et} \quad \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = -t^2 \end{cases}, t \in [0, 1]$$

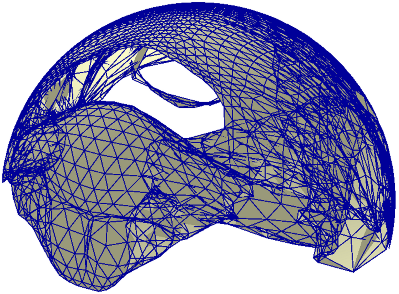
- g est-elle $\mathcal{C}^2$? $\mathcal{G}^2$?

Plan tangent

- Surface de $\mathbb{R}^3$: $S(u,v) = (S_x(u,v), S_y(u,v), S_z(u,v))$
- Normale : $n^S(u,v) = (S_{,u} \times S_{,v}) / \|S_{,u} \times S_{,v}\| \in \mathbb{S}^2$
- Espace tangent de S en x_0 :
  $T_{x_0} S = Im(DS(u,v)) = \{S_{,u}(u,v) h_u + S_{,v}(u,v) h_v | (h_u, h_v) \in \mathbb{R}^2\}$.
- Application de Gauss :

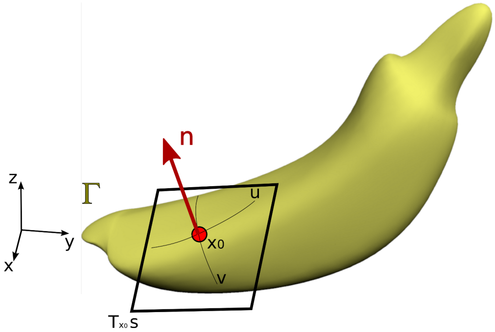
$$N : \left\{ \begin{array}{lcl} \Gamma & \rightarrow & \mathbb{S}^2 \\ x_0 = S(u,v) & \mapsto & N(x_0) = n(u,v) \end{array} \right.$$





Propriétés intégrales :

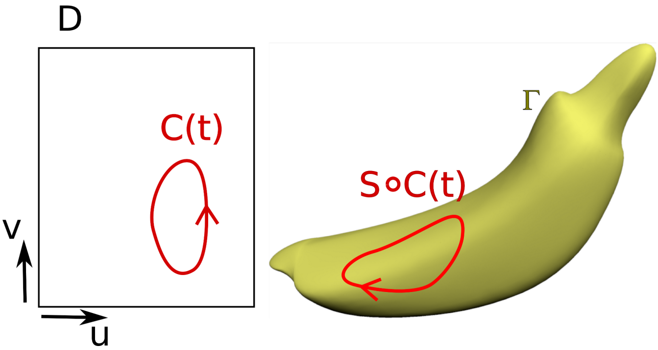
- Aire de Γ : $\int\int_{(u,v)\in\mathcal{D}} \|S_{,u} \times S_{,v}\| \mathrm{d}u\mathrm{d}v$.
- Volume domaine défini par Γ : $\int\int_{(u,v)\in\mathcal{D}} S_z(u,v)\, n_z^S(u,v) \mathrm{d}u\mathrm{d}v$



Première forme fondamentale

- Courbe $C \subset \mathcal{D}$ de longueur $L = \int_t < C'(t), C'(t) >^{1/2} \mathrm{d}t$.
- Longueur de $C_S = S(C_x, C_y)$

$$L_S = \int_t < (S \circ C)'(t), (S \circ C)'(t)) >^{1/2} \mathrm{d}t$$
$$= \int_t \left(C'^T(t)\, \mathrm{I}_S(t)\, C'(t)\right)^{1/2} \mathrm{d}t$$

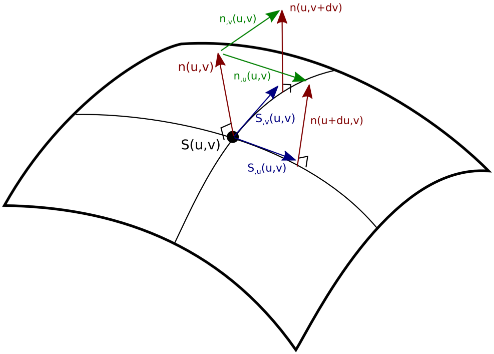


Première forme fondamentale

- I_S : Première forme fondamentale / tenseur métrique

$$\mathrm{I}_S = \begin{pmatrix} S_{,u}^2 & < S_{,u}, S_{,v} > \\ < S_{,u}, S_{,v} > & S_{,v}^2 \end{pmatrix}$$

- I_S : forme quadratique associée à $< \mathrm{d}S, \mathrm{d}S >$
- $\sqrt{\det(\mathrm{I}_S)}$ = variation d'aire infinitesimale
  $\Rightarrow$ Aire de $\Gamma = \int\int_{(u,v)\in\mathcal{D}} \sqrt{\det(\mathrm{I})}\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v$



Les vecteurs $(S_{,u}, S_{,v})$ et $(n_{,u}, n_{,v})$ définissent le même plan tangent.

Seconde forme fondamentale

Les vecteurs $(n_{,u}, n_{,v})$ peuvent s'exprimer dans le plan $(S_{,u}, S_{,v})$.

$$\left\{ \begin{array}{l} n_{,u} = w_{00}\, S_{,u} + w_{01}\, S_{,v} \\ n_{,v} = w_{10}\, S_{,u} + w_{11}\, S_{,v} \end{array} \right.$$

Sous forme matricielle

$$\left(\begin{array}{c} n_{,u}^T \\ \\ n_{,v}^T \end{array} \right) = \mathrm{W}_S \left(\begin{array}{c} S_{,u}^T \\ \\ S_{,v}^T \end{array} \right)$$

En multipliant par $(S_{,u}, S_{,v})$.

$$\mathrm{II}_S = \mathrm{W}_S\, \mathrm{I}_S$$

Avec II_S la seconde forme fondamentale associée à à S.

$$\mathrm{II}_S = \left(\begin{array}{cc} < n_{,u}, S_{,u} > & < n_{,u}, S_{,v} > \\ < n_{,v}, S_{,u} > & < n_{,v}, S_{,v} > \end{array} \right)$$

Relation aux dérivées secondes

Par orthogonalité

$$\left\{ \begin{array}{l} < n, S_{,u} >= 0 \\ < n, S_{,v} >= 0 \end{array} \right.$$

En dérivant

$$\left\{ \begin{array}{l} < n_{,u}, S_{,u} >= - < n, S_{,uu} > \\ < n_{,v}, S_{,u} >= - < n, S_{,uv} > \\ < n_{,v}, S_{,v} >= - < n, S_{,vv} > \end{array} \right.$$

Expression de II_S uniquement à partir de n et des dérivées secondes de S.

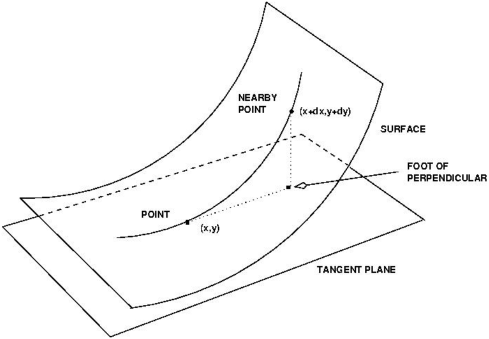
$$\mathrm{II}_S = - \begin{pmatrix} < n, S_{,uu} > & < n, S_{,uv} > \\ < n, S_{,uv} > & < n, S_{,vv} > \end{pmatrix}$$

Seconde forme fondamentale

- II forme quadratique associée à $< \mathrm{d}S, \mathrm{d}n >$
  $=$ développement de Taylor de la surface dans le plan tangent.

$$\mathrm{II}_S = \begin{pmatrix} < n_{,u}, S_{,u} > & < n_{,u}, S_{,v} > \\ < n_{,v}, S_{,u} > & < n_{,v}, S_{,v} > \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{II}_S = \begin{pmatrix} < S_{,uu}, n > & < S_{,uv}, n > \\ < S_{,uv}, n > & < S_{vv}, n > \end{pmatrix}$$



Wikipedia

Application de Weingarten

La matrice W_S telle que

$$\mathrm{W}_S = \mathrm{II}_S \, \mathrm{I}_S^{-1}$$

est la matrice de Weingarten (ou Shape operator).
W_S est diagonalisable et possède des valeurs propres réelles.

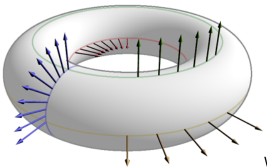
$$\mathrm{W}_s = \mathrm{V}^T \, \Lambda \, \mathrm{V} \, ,$$

avec

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

λ_1, λ_2 sont les courbures principales de la surface.

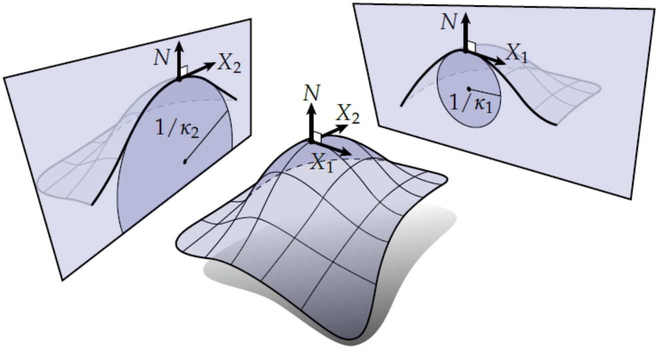
Rem. Application de Weingarten = différentielle de l'application de Gauss.



Wikipedia

Courbure principales

- Valeurs propres de W_S : courbures principales (λ_1, λ_2).
- Rayons de courbures principales $(r_1 = 1/\lambda_1, r_2 = 1/\lambda_2)$.
- Vecteurs propres de W_S : directions $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ des courbures principales.

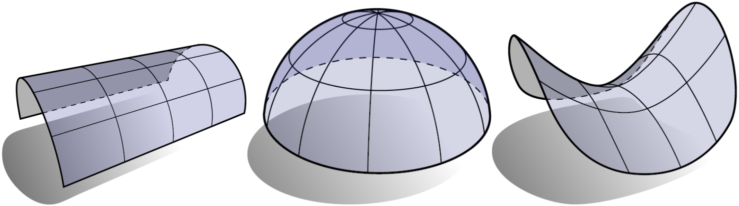


[Keenan Crane, Digital Geometry Processing with Discrete Exterior Calculus, SIGGRAPH 2013]

Types de courbures

Une surface peut être localement du type

- Planaire $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.
- Cylindrique $|\lambda_i| > 0$, $\lambda_j = 0$.
- Parabolique $\text{sign}(\lambda_1) = \text{sign}(\lambda_2)$.
- Elliptique $\text{sign}(\lambda_1) = -\text{sign}(\lambda_2)$.



[Keenan Crane, Digital Geometry Processing with Discrete Exterior Calculus, SIGGRAPH 2013]

Courbures moyennes et de Gauss

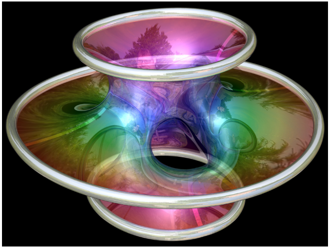
- Courbure de Gauss :

$$K_S = \kappa_1 \kappa_2 = \det(\mathrm{W}_S) = \frac{\det(\mathrm{II}_S)}{\det(\mathrm{I}_S)}$$

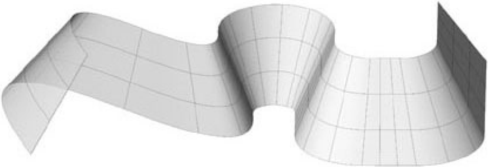
- Courbure moyenne :

$$H_S = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\mathrm{W}_S)$$

- $H = 0 \Rightarrow$ surface minimale
- 2 Surfaces isométriques on le même K
- $K = 0$ Surface développable



©Paul Nylander

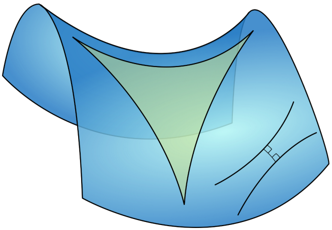


M. Nettelbladt

Théorème de Gauss-Bonnet :

$$\int_S K \mathrm{d}A + \int_{\partial S} k_g \mathrm{d}s = 2\pi\chi(S)$$

- k_g : courbure géodésique.
- χ : Caractéristique d'Euler (invariant topologique).



Wikipedia

Application pour un polygone au voisinage d'un sommet :

$$\frac{1}{A}\left(\sum_i \theta_i - 2\pi\right) \simeq K$$