5ETI Synthèse d'images: Continuité et courbure des surfaces différentiables

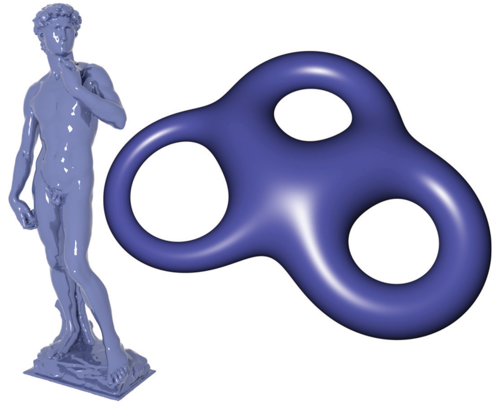
CPE Lyon
damien.rohmer@cpe.fr

2013

Notion de topologie

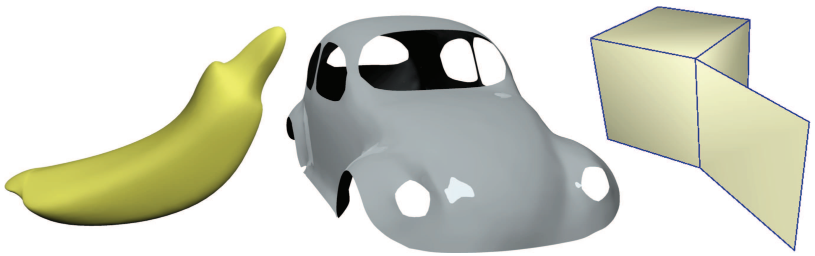
- **Topologie** = Étude de la structure d'un espace **indépendamment de sa géométrie**.

- 2 surfaces sont topologiquement équivalentes si on peut transformer l'une en l'autre par des transformations continues (pas de déchirures ni soudures).



Notion de variété

- Une surface Γ est une **2-variétée (manifold)** ssi tout point possède un voisinage **homéomorphe** à un (demi) disque.
- Homéomorphisme = application bijective continue + reciproque continue.



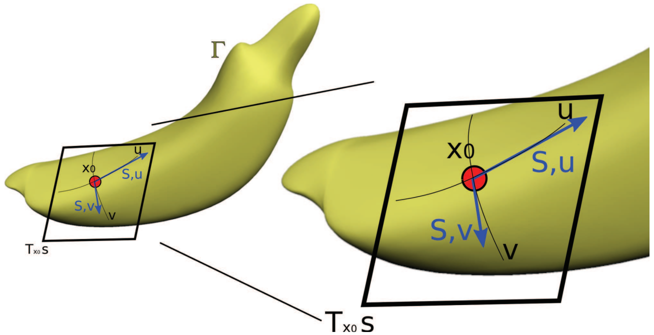
Notion de continuité

- Soit Γ la surface associée au mapping S.

$$S : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \mapsto & S(u,v) \end{array} \right.$$

$$\Gamma = tr_{\mathcal{D}}(S) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 | \forall (u,v) \in \mathcal{D}, S(u,v) = \mathbf{x}\}$$

- S est $\mathcal{C}^1$ ssi $S_{,u}$ et $S_{,v}$ sont définies et continues.
- S est $\mathcal{C}^2$ ssi $S_{,uu}$, $S_{,vv}$ et $S_{,uv}$ sont définies et continues.



Notion de continuité

- Γ est $\mathcal{G}^1$ ssi

$$\exists (S,\mathcal{D}) \subset \mathcal{C}^1 \times \mathbb{R}^2 \;, \quad tr_{\mathcal{D}}(S) = \Gamma$$
$$\Leftrightarrow \text{ plan tangent partout}$$

- Γ est $\mathcal{G}^2$ ssi

$$\exists (S,\mathcal{D}) \subset \mathcal{C}^2 \times \mathbb{R}^2 \;, \quad tr_{\mathcal{D}}(S) = \Gamma$$
$$\Leftrightarrow \text{ courbure continue}$$

Remarque $S \subset \mathcal{C}^k \neq \Gamma \subset \mathcal{G}^k$.

$\mathcal{G}^2$ nécessaire pour reflets.

Exemple de continuité

$$f : \left\{ \begin{array}{l} x(t) = t \\ y(t) = t \end{array} \right. , t \in [-1,0[\quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} x(t) = t/2 \\ y(t) = t/2 \end{array} \right. , t \in [0,2]$$

- f est-elle $\mathcal{C}^2$? $\mathcal{G}^2$?

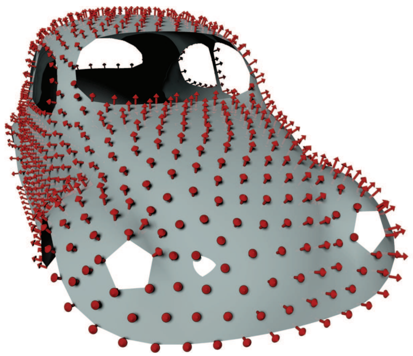
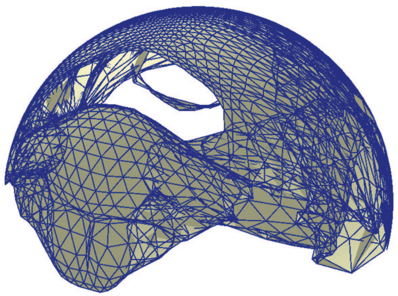
$$g : \left\{ \begin{array}{l} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \end{array} \right. , t \in [-1,0[\quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} x(t) = -t \\ y(t) = -t^2 \end{array} \right. , t \in [0,1]$$

- g est-elle $\mathcal{C}^2$? $\mathcal{G}^2$?

Plan tangent

- Surface de $\mathbb{R}^3$: $S(u,v) = (S_x(u,v), S_y(u,v), S_z(u,v))$
- Normale : $n^S(u,v) = (S_{,u} \times S_{,v}) / \|S_{,u} \times S_{,v}\| \in \mathbb{S}^2$
- Espace tangent de S en x_0 :
  $T_{x_0}S = Im(DS(u,v)) = \{S_{,u}(u,v)h_u + S_{,v}(u,v)h_v | (h_u,h_v) \in \mathbb{R}^2\}$.
- Application de Gauss :

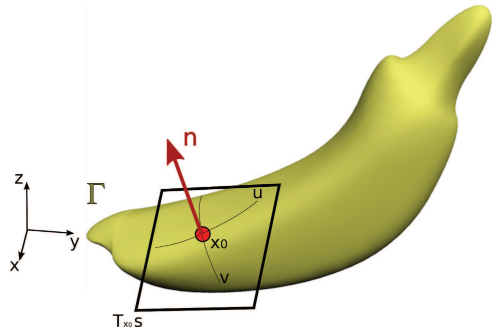
$$N : \left\{ \begin{array}{lcl} \Gamma & \rightarrow & \mathbb{S}^2 \\ x_0 = S(u,v) & \mapsto & N(x_0) = n(u,v) \end{array} \right.$$

Propriétés intégrales

Propriétés intégrales :

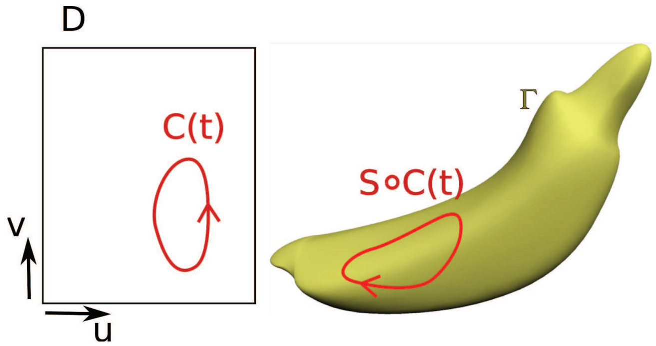
- Aire de Γ : $\int\int_{(u,v)\in\mathcal{D}} \|S_{,u} \times S_{,v}\| \mathrm{d}u\mathrm{d}v$.
- Volume domaine défini par Γ : $\int\int_{(u,v)\in\mathcal{D}} S_z(u,v)\, n_z^S(u,v) \mathrm{d}u\mathrm{d}v$



Première forme fondamentale

- Courbe $C \subset \mathcal{D}$ de longueur $L = \int_t < C'(t), C'(t) >^{1/2} \mathrm{d}t$.
- Longueur de $C_S = S(C_x, C_y)$

$$\begin{aligned} L_S = & \int_t < (S \circ C)'(t), (S \circ C)'(t)) >^{1/2} \mathrm{d}t \\ = & \int_t \left(C'^T(t)\, \mathrm{I}_S(t)\; C'(t)\right)^{1/2} \mathrm{d}t \end{aligned}$$



Première forme fondamentale

- I_S : Première forme fondamentale / tenseur métrique

$$\mathrm{I}_S = \begin{pmatrix} S_{,u}^2 & < S_{,u}, S_{,v} > \\ < S_{,u}, S_{,v} > & S_{,v}^2 \end{pmatrix}$$

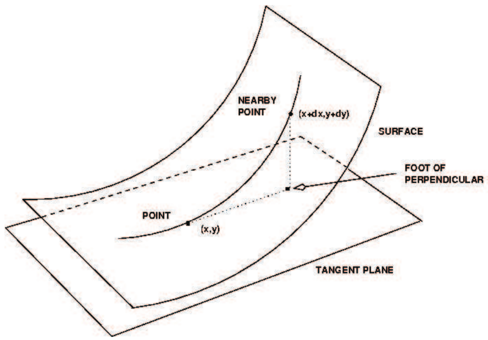
- I_S : forme quadratique associée à $< \mathrm{d}S, \mathrm{d}S >$
- $\sqrt{\det(\mathrm{I}_S)}$ = variation d'aire infinitesimale
  $\Rightarrow$ Aire de $\Gamma = \int\int_{(u,v)\in\mathcal{D}} \sqrt{\det(\mathrm{I})}\; \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v$

Seconde forme fondamentale

- II forme quadratique associée à $- < \mathrm{d}S, \mathrm{d}n >$
  $=$ développement de Taylor de la surface dans le plan tangent.

$$\mathrm{II}_S = -\begin{pmatrix} < n_{,u}, S_{,u} > & < n_{,u}, S_{,u} > \\ < n_{,u}, S_{,u} > & < n_{,u}, S_{,u} > \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{II}_S = \begin{pmatrix} < S_{,uu}, n > & < S_{,uv}, n > \\ < S_{,uv}, n > & < S_{,vv}, n > \end{pmatrix}$$



Wikipedia

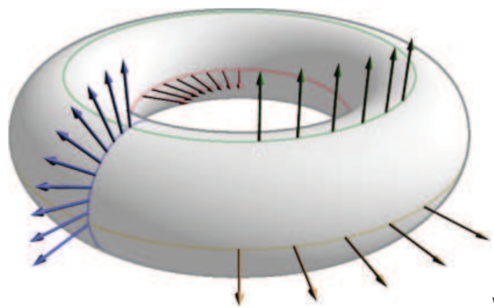
Application de Weingarten

- Application de Weingaten = Différentielle de l'application de Gauss (n) :
- $n_{,u}$ et $n_{,v}$ sont dans le plan tangent.

$$\begin{cases} \det(\mathrm{I})\, n_{,u} = (\mathrm{I}_1\mathrm{II}_1 - \mathrm{I}_2\mathrm{II}_0)S_{,u} + (\mathrm{I}_1\mathrm{II}_0 - \mathrm{I}_0\mathrm{II}_1)S_{,v} \\ \det(\mathrm{I})\, n_{,v} = (\mathrm{I}_1\mathrm{II}_2 - \mathrm{I}_2\mathrm{II}_1)S_{,u} + (\mathrm{I}_1\mathrm{II}_1 - \mathrm{I}_0\mathrm{II}_2)S_{,v} \end{cases}$$

- Shape operator S :

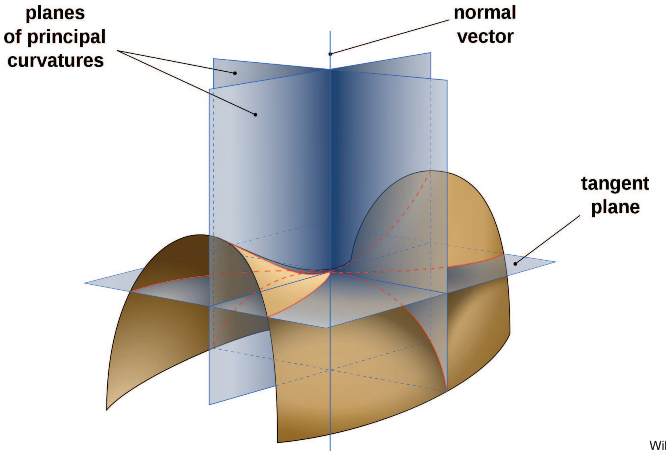
$$\mathrm{S} = \frac{1}{\det(\mathrm{I})} \begin{pmatrix} \mathrm{I}_1\mathrm{II}_1 - \mathrm{I}_2\mathrm{II}_0 & \mathrm{I}_1\mathrm{II}_0 - \mathrm{I}_0\mathrm{II}_1 \\ \mathrm{I}_1\mathrm{II}_2 - \mathrm{I}_2\mathrm{II}_1 & \mathrm{I}_1\mathrm{II}_1 - \mathrm{I}_0\mathrm{II}_2 \end{pmatrix}$$



Wikipedia

Courbure

- Courbure = variation de la normale $\Leftrightarrow$ Weingarten
- S diagonalisable : $\mathrm{S} = \mathrm{T}^T \mathrm{diag}(\kappa_1, \kappa_2)\mathrm{T}$.
- (κ_1, κ_2)=courbures principales.
- T = directions des courbures principales.



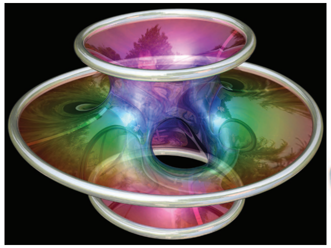
Wikipedia

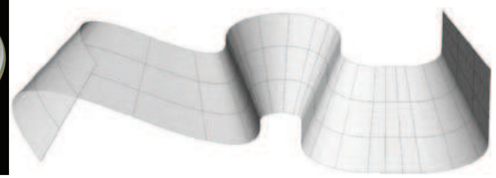
Courbures

- Courbure Gaussienne : $K = \kappa_1\kappa_2 = \det(\mathrm{S}) = \frac{\det(\mathrm{II})}{\det(\mathrm{I})}$
- Courbure moyenne :

$$H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\mathrm{S}) = \frac{1}{2\det(\mathrm{I})}(\mathrm{II}_0\mathrm{I}_2 + \mathrm{I}_0\mathrm{II}_2 - 2\mathrm{I}_1\mathrm{II}_1)$$

- $H = 0 \Rightarrow$ surface minimale
- 2 Surfaces isométriques on le même K
- $K = 0$ Surface développable





©Paul Nylander M. Nettelbladt

Relation intégrale

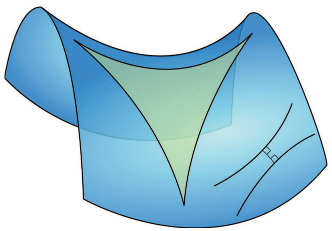
Théorème de Gauss-Bonnet :

$$\int_S K \mathrm{d}A + \int_{\partial S} k_g \mathrm{d}s = 2\pi\chi(S)$$

- k_g : courbure géodésique.
- χ : Caractéristique d'Euler (invariant topologique).

Application pour un polygone au voisinage d'un sommet :

$$\frac{1}{A}\left(\sum_i \theta_i - 2\pi\right) \simeq K$$



Wikipedia