

Remarques sur le partiel (ou tout documents de travail à analyser).

Le document comporte 6 pages. Il faut toujours diagonaliser rapidement les documents fournis pour connaître le thème traité et localiser les points importants.

- * Beaucoup d'entre vous ont traités questions après questions en perdant beaucoup de temps sur les premières de détails.
- * Une question d'ouverture sur 6 points était présente à la fin. Peu d'étudiants l'ont traitée.
- * La somme des points dépasse la note de 20. Il ne faut pas hésiter à passer des questions que l'on ne maîtrise pas.

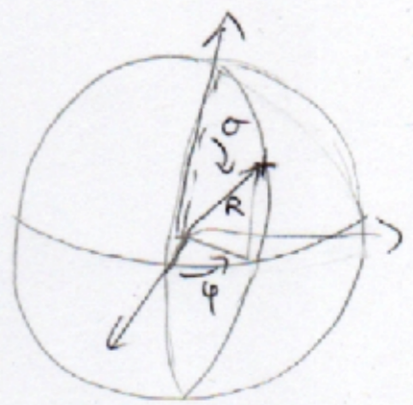
En temps limité, il ne faut pas perdre de temps sur des calculs de détails.
Une question à 0.5 points ne doit pas amener à un calcul s'étendant sur une ou deux pages.

Il faut essayer d'analyser le problème avant de se lancer dans un calcul fastidieux. Ici seul la question sur la 1ère forme fondamentale nécessitait de faire un réel calcul. L'ensemble des autres questions portait sur la compréhension du problème.

Privilégiez toujours une écriture algorithmique à une écriture de code sur papier.
Ne passez pas une page d'écriture de mise en place d'un chargement de fichier de texture lorsqu'on souhaite définir des coordonnées de textures.

Dans un document explicatifs, essayez toujours de réaliser un ou plusieurs schémas.
C'est plus rapide que d'écrire un paragraphe et cela focalise immédiatement sur les variables importantes.

1: $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$
 $F: p \mapsto \|p - p_0\|$ avec $\|p - p_0\| = R$ défini la sphère de rayon R .



$(\sigma_{\text{nyon}}, \varphi_{\text{nyon}}) \simeq (45^\circ, 5^\circ)$
 $(\sigma_{\text{quito}}, \varphi_{\text{quito}}) \simeq (90^\circ, 280^\circ)$
 ↗ $\simeq \frac{3}{4} \times 360^\circ$

3: $I_S = \begin{pmatrix} \|\frac{\partial S}{\partial \sigma}\|^2 & \langle \frac{\partial S}{\partial \sigma}, \frac{\partial S}{\partial \varphi} \rangle \\ \langle \frac{\partial S}{\partial \sigma}, \frac{\partial S}{\partial \varphi} \rangle & \|\frac{\partial S}{\partial \varphi}\|^2 \end{pmatrix}$ avec $\frac{\partial S}{\partial \sigma} = \begin{pmatrix} R \cos \sigma \cos \varphi \\ R \cos \sigma \sin \varphi \\ -R \sin \sigma \end{pmatrix}$
 $\frac{\partial S}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -R \sin \sigma \sin \varphi \\ +R \sin \sigma \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$

$\|\frac{\partial S}{\partial \sigma}\|^2 = R^2 [\cos^2 \sigma (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + \sin^2 \sigma] = R^2$

$\|\frac{\partial S}{\partial \varphi}\|^2 = R^2 \sin^2 \sigma (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = R^2 \sin^2 \sigma$

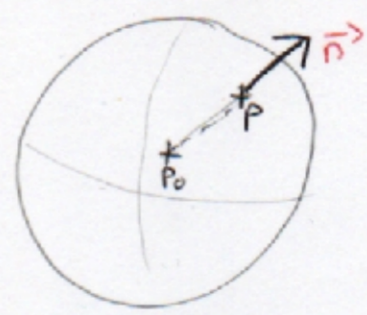
$\langle \frac{\partial S}{\partial \sigma}, \frac{\partial S}{\partial \varphi} \rangle = R^2 (-\cos \sigma \cos \varphi \sin \sigma \sin \varphi + \cos \sigma \cos \varphi \sin \sigma \sin \varphi) = 0$

$\Rightarrow I_S = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2 \sigma \end{pmatrix}$

4: $\varphi \uparrow \begin{matrix} d\varphi \\ d\sigma \\ \rightarrow \sigma \end{matrix} \rightarrow \text{Aire élément} = \sqrt{\det(I_S)} d\sigma d\varphi = R^2 \sin \sigma d\sigma d\varphi$

5: Aire de la sphère: on intègre sur le domaine \mathcal{D} :
 $\int_{\sigma=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} R^2 \sin \sigma d\sigma d\varphi = 2\pi R^2 [-\cos \sigma]_0^\pi = 4\pi R^2$

6: $n(\alpha, \varphi) = \frac{\frac{\partial S}{\partial \alpha} \times \frac{\partial S}{\partial \varphi}}{\| \frac{\partial S}{\partial \alpha} \times \frac{\partial S}{\partial \varphi} \|}$



en coordonnées sphériques: $P-P_0$ est colinéaire à la normale.

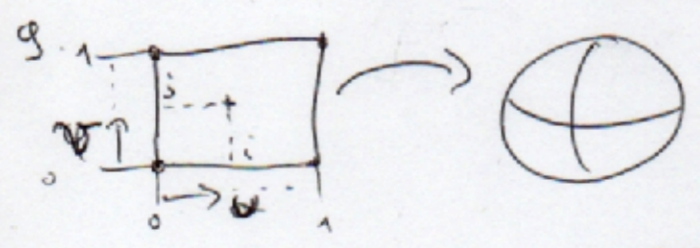
La norme de $\|P-P_0\|$ valant R , il suffit de normaliser par R pour obtenir le vecteur normal:

$n(\alpha, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin \alpha \cos \varphi \\ \sin \alpha \sin \varphi \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$

7. $I_S = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \sin^2 \alpha \end{pmatrix}$ $W_S = \frac{1}{S} \times I_S^{-1} = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \sin^2 \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/R^2 & 0 \\ 0 & 1/R^2 \sin^2 \alpha \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} 1/R & 0 \\ 0 & 1/R \end{pmatrix}$

On a bien $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{R}$ qui correspond bien à une courbure constante. On retrouve un rayon de courbure de R ce qui était attendu.

8. Voir code.



on ajoute `mesh.addTexture(Vec(u/N1, v/N2)) ;` pour faire varier les coordonnées entre 0 et 1.

10. On considère la carte d'élevation I pour moduler le rayon de la sphère (on déforme celle-ci le long de la normale).

On applique donc la déformation $p = \dots$

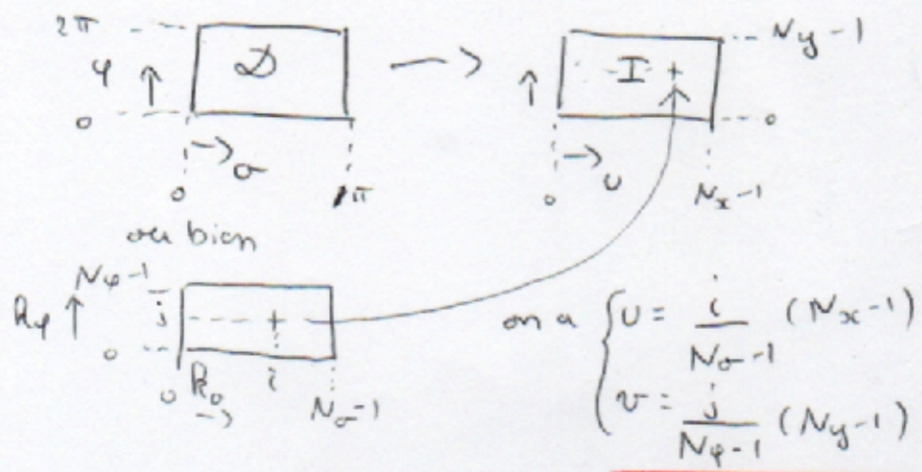
$p(\alpha, \varphi) = p(\alpha, \varphi) + \underline{p + \alpha(\alpha, \varphi) \vec{n}}$

avec $\alpha(\alpha, \varphi) = I(\alpha, \varphi) \times M$

I varie entre 0 et 255 \Rightarrow on prend M tel que $255 \rightarrow 8 \text{ km}$ à l'échelle de la terre choisie.

Remarque: L'image I n'est pas échantillonnée de la même manière que le terrain.

Il faut faire correspondre (σ, τ) à (u, v) avec:



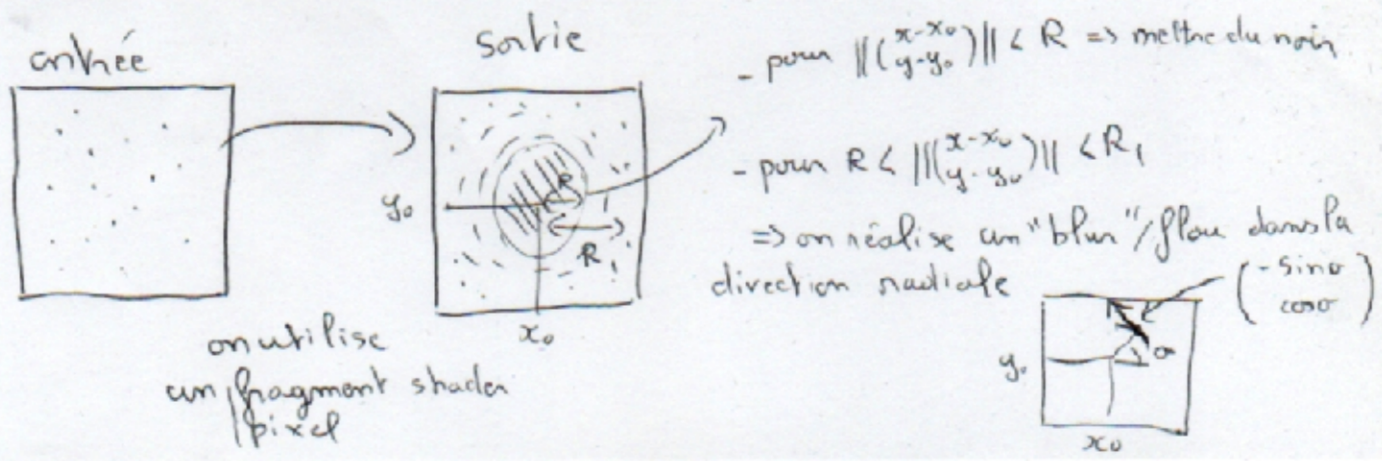
→ on peut prendre (u, v) entier avec une approximation au plus proche voisin (C^0)
 → ou pour un aspect + Pisse (C^1), réaliser une interpolation bi-linéaire.

3.1:

Q.11:
$$\begin{cases} P_0''(t) = m_s \left(\frac{P_s''(t) - P_0''(t)}{\|P_s(t) - P_0(t)\|^3} + \alpha \frac{P_b - P_0(t)}{\|P_b - P_0(t)\|^3} \right) \\ P_s''(t) = \alpha m_s \frac{P_b - P_s(t)}{\|P_b - P_s(t)\|^3} \end{cases}$$
 il s'agit d'un système couplé d'EDO.

- 12: ce système d'équation est non linéaire: dénominateur en $\| \cdot \|^3$
- 13: la solution de ce système non linéaire n'est pas un polynôme. Une méthode numérique standard d'ordre n (n fixé) ne peut donc pas résoudre ce système exactement.
- 14: - On peut écarter Euler implicite: système non raide qui ne risque pas de diverger (phénomène d'attraction)
 - Euler Explicite et Runge-Kutta sont suffisant et + efficace.
 Si l'on souhaite obtenir un maximum de précision pour un Δt donné, on choisit Runge-Kutta ordre 5.

5.



16. Il faut calculer la distance pour $N \times N$ astres.
complexité en $O(N^2)$

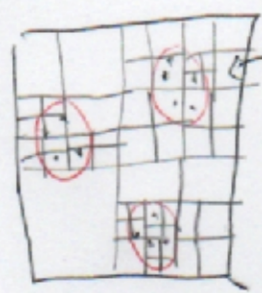
17. $t_{ps} \approx 10^{-6} \times (10^{10})^2 \approx \underline{10^{14} s} \approx 3$ millions années
techniquement irréalisable.

18. - Amputécartes : - utilisation GPU : mémoire limitée
brute accélération insuffisante.

- tri par grille spatiale cartésienne : trop de vicie.

→ une solution possible est un octree qui va subdiviser l'espace uniquement

lorsque nécessaire :



on recherche rapidement (construction en $O(N \log(N))$)
+ recherche en $\log(N)$
les autres proches.

Pour limiter l'espace mémoire nécessaire on peut supprimer toutes les étoiles/planètes
trop éloignées dès le départ.

Nouvelle complexité : $O(N \log(N))$ = génération de l'octree

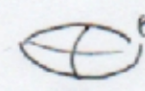
$t_{ps} \text{ calcul} \approx 10 \times 10^{10} \times 10^{-6} \approx 10^5 s \approx 1.2$ jours
⇒ réalisable.

19.



→ contexte de cinéma : on peut réaliser des
simulation longues : on n'est pas limité dans le temps.

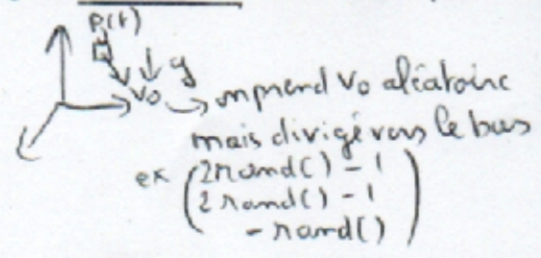
→ météorite : (modélisation)



on part d'une ellipsoïde à basse
résolution
 $\begin{cases} r_1 \sin \alpha \cos \varphi \\ r_2 \sin \alpha \sin \varphi \\ r_3 \cos \alpha \end{cases}$

↳ on ajoute un bruit de perlin

Pour l'animation : méthode particulaire



⇒ puis on plaque la météorite en $p(t)$

Pour la fumée : $\begin{cases} \text{sprites avec particules} \\ \text{ou} \\ \text{simulation de fumée + boue (ex. Level Sets)} \end{cases}$

