Synthèse d'images 5ETI
Première session 2012/2013 - *CPE*

durée 2h.
Tous documents et calculatrices autorisés.

Le barème est donné à titre indicatif.
Illustrez au maximum vos réponses de schémas.

Dans les questions demandant du code/pseudo-code, le respect de la syntaxe exacte C++ n'est pas demandé. L'évaluation portant davantage sur l'aspect algorithmique et vos explications.

En cas de doute sur la compréhension de l'énoncé, explicitez ce que vous comprenez et poursuivez l'exercice dans cette logique.

1 Géométrie différentielle

Soit une sphère centrée en $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ et de rayon R.

Question 1 (1 point) *Donnez l'équation implicite de la sphère. C'est à dire que l'on donnera la solution sous la forme $F(\mathbf{p}) = iso$, où l'on explicitera la fonction F et la valeur iso.*

L'equation explicite de la sphère en coordonnées sphériques peut être donnée par

$$\forall(\theta,\phi) \in \mathcal{D} = [0,\pi] \times [0,2\pi] \ , \quad \begin{cases} x(\theta,\phi) = R\sin(\theta)\cos(\phi) + x_0 \\ y(\theta,\phi) = R\sin(\theta)\sin(\phi) + y_0 \\ z(\theta,\phi) = R\cos(\theta) + z_0 \end{cases} \tag{1}$$

On appelle S la fonction, ou mapping, de cette sphère tel que

$$S : \begin{cases} \mathcal{D} & \to \quad \mathbb{R}^3 \\ (\theta,\phi) & \mapsto \quad S(\theta,\phi) = (x(\theta,\phi), y(\theta,\phi), z(\theta,\phi)) \ . \end{cases}$$

On utilise ces coordonnées sphériques pour représenter un point sur la Terre. Supposons que la *latitude* $\phi_0 = 0$ est positionnée le long du méridien de Greenwich, et que $\theta_0 = 0$ est positionnée au pôle Nord.

Question 2 (0.5 point) *Quels sont d'après vous les coordonnées approximatives (θ_i, ϕ_i) de la ville de Lyon, et de la ville de Quito capitale de l'Equateur. Faites un schéma.*

Question 3 (1 point) *Calculez la première forme fondamentale associée à S.*

Question 4 (0.5 point) *En vous servant du résultat précédent, montrez qu'un élément infinitésimal du domaine $\mathcal{D}$ que l'on notera $\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$ est déformé par S en un morceau de surface dont l'aire vaut*

$$R^2 \, \sin(\theta) \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi \ .$$

Question 5 (0.5 point) *En vous servant de l'élément différentiel précédent, retrouvez par le calcul que l'aire d'une sphère vaut $4\pi R^2$.*

Soit $\mathbf{n}(\theta, \phi)$ la normale unitaire sortante en fonction des paramètres (θ, ϕ).

Question 6 (0.5 point) *Quelle est l'expression de $\mathbf{n}(\theta, \phi)$ en fonction de $\frac{\partial S}{\partial u}(\theta, \phi)$ et $\frac{\partial S}{\partial v}(\theta, \phi)$?*
Sans faire le calcul de cette expression, donnez directement le résultat de $\mathbf{n}(\theta, \phi)$ et fonction de θ et ϕ. Expliquez votre raisonnement.

On admet que la seconde forme fondamentale II_S de S vaut

$$II_S = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R\sin^2(\theta) \end{pmatrix} .$$

Question 7 (1 point) *Que vaut la matrice de l'application de Weingarten ? Que valent les deux courbures principales λ_1 et λ_2. Ces résultats étaient-ils prévisibles ? Commentez.*

2 Modélisation

La sphère ainsi définie nous permet de représenter la Terre vue du ciel.

2.1 Géométrie et code

Nous souhaitons tout d'abord écrire un code permettant de modéliser cette sphère géométriquement et l'afficher avec OpenGL. Pour cela, nous stockons cette sphère sous forme d'un maillage en utilisant une discrétisation des coordonnées sphériques données en eq. 1.

Question 8 (2 points) *Ecrivez une fonction* cree sphere*(N_1,N_2,R,p_0) en C++. Le paramètre N_1 correspond au nombre d'échantillons suivant θ, le paramètre N_2 correspond au nombre d'échantillons suivant ϕ, R correspond au rayon de la sphère, et p_0 est un vecteur (de type $cpe :: v_3$ par exemple) qui correspond au centre de la sphère.*

On pourra utiliser l'ensemble des structures et classes utilisées en TP pour simplifier la manipulation des différents éléments de stockage.

2.2 Texture

Nous souhaitons ensuite plaquer une texture de la Terre sur celle-ci. La texture ainsi que le résultat souhaité sont illustrés en fig.1.

Question 9 (1 point) *Dans la boucle de construction de votre sphère, ajoutez la mise en place des coordonnées de textures. (Faites un schéma en précisant vos axes).*

2.3 Carte d'élévation

Pour donner davantages de détails à la surface de la Terre, nous souhaitons déformer localement la géométrie telle que les zones montagneuses soient plus hautes que les plaines. Pour cela, on dispose d'une carte d'élévation satellite. Les zones blanches correspondent aux zones élevées et inversement pour les zones noires.

Question 10 (2 points) *Étant donnée cette carte d'élévation expliquez votre démarche pour obtenir un terrain plus élevé dans les zones montagneuses (résultat illustré en fig. 2). Donnez un maximum de détails (valeurs prises en compte, etc) et illustrez vos réponses de schémas explicatifs.*

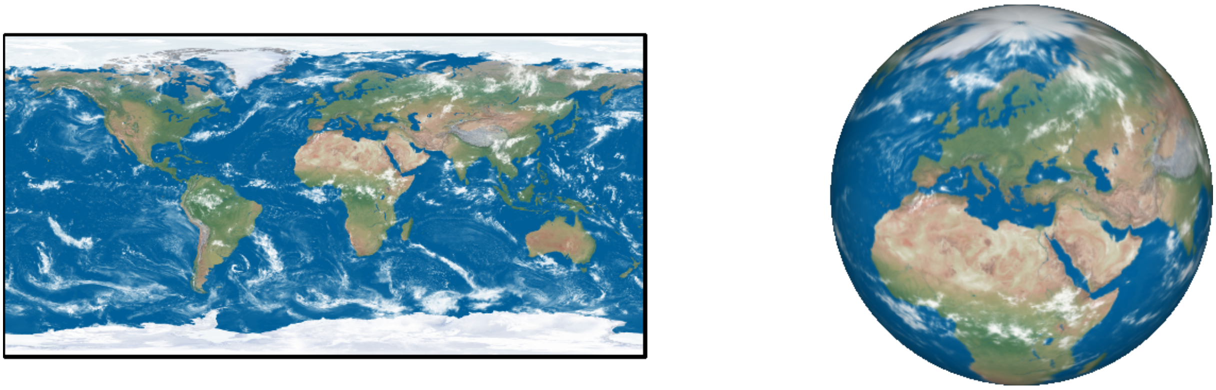

FIGURE 1 – Gauche : Texture utilisée. Droite : résultat où la texture est plaquée sur la sphère.

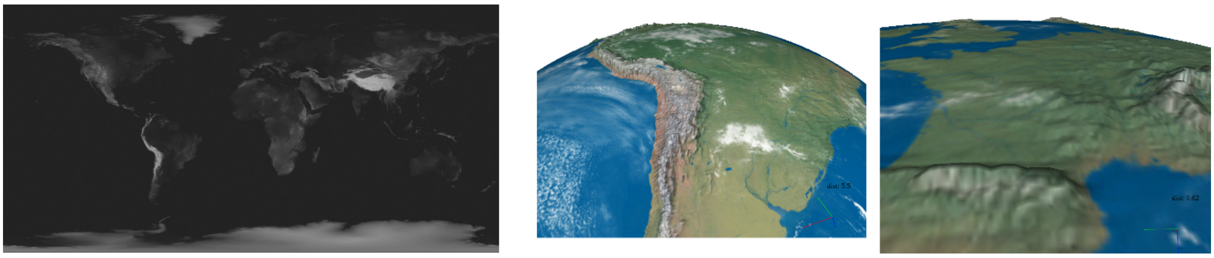

FIGURE 2 – Gauche : Texture d'élévation indiquant les zones montagneuses. Milieu et droite : résultat géométrique.

3 Scénario

3.1 Simulation

Le 21 décembre 2012, la fin du monde arrive.

Un trou noir de masse $\alpha > 1000$ fois celle du Soleil (m_s) apparait à une distance environ égale à la distance Terre-Soleil.

On note :
- m_t la masse de la Terre,
- m_s la masse du Soleil,
- $\mathbf{p}_s$ la position du centre du Soleil,
- $\mathbf{p}_0$ la position du centre de la Terre,
- $\mathbf{p}_b$ la position du trou noir (b=**B**lack hole).

Notez que l'on ne négligera pas la masse du Soleil devant celle du trou noir : c'est à dire qu'on ne négligera pas 1 devant α. Par contre on négligera toute autre force d'interaction (Lune sur la Terre, autres planètes, etc).

On considèrera donc le mouvement de la Terre attirée par le Soleil et le trou noir en même temps. Le Soleil est quant à lui attiré par le trou noir et on négligera la force d'attraction de la Terre sur le Soleil.

La force totale d'attraction sur la Terre est la suivante :

$$\mathbf{F}_1(t) = m_t\, m_s \left(\frac{\mathbf{p}_s(t) - \mathbf{p}_0(t)}{\|\mathbf{p}_s(t) - \mathbf{p}_0(t)\|^3} + \alpha \frac{\mathbf{p}_b - \mathbf{p}_0(t)}{\|\mathbf{p}_b - \mathbf{p}_0(t)\|^3} \right) .$$

La force totale d'attraction du trou noir sur le Soleil est la suivante :

$$\mathbf{F}_2(t) = \alpha\, m_s^2 \frac{\mathbf{p}_b - \mathbf{p}_s(t)}{\|\mathbf{p}_b - \mathbf{p}_s(t)\|^3} \, .$$

Question 11 (1 point) *Ecrivez le système d'équations différentielles vérifié par :*

- *la position du centre de la Terre $\mathbf{p}_0(t)$ au temps t,*
- *la position du centre du Soleil $\mathbf{p}_s(t)$ au temps t.*

Question 12 (0.5 point) *Ce système d'équations différentielles est-il linéaire ?*

Question 13 (1 point) *Peut-on intégrer exactement ce système différentiel à l'aide d'une méthode numérique standard (tel que Runge-Kutta, Euler explicite ou implicite) ? Expliquez pourquoi.*

On cherche à calculer très précisément l'heure de la fin du monde à la seconde près. On dispose pour cela de peu de temps de calcul pour l'intégration numérique, il faut donc prendre un pas de temps Δt le plus élevé possible.

Question 14 (1 point) *Quelle méthode d'intégration proposez vous ? Expliquez pourquoi et précisez la démarche mise en place.*

3.2 GPU

Vue depuis la Terre, la présence du trou noir est visible de part son impact sur les rayons lumineux en provenance des autres étoiles. La lumière passant proche du centre du trou noir est déviée de la ligne de droite et donne l'impression visuelle de former des filaments lumineux autour d'une zone noire. Une illustration d'un tel phénomène est proposé en fig. 3.

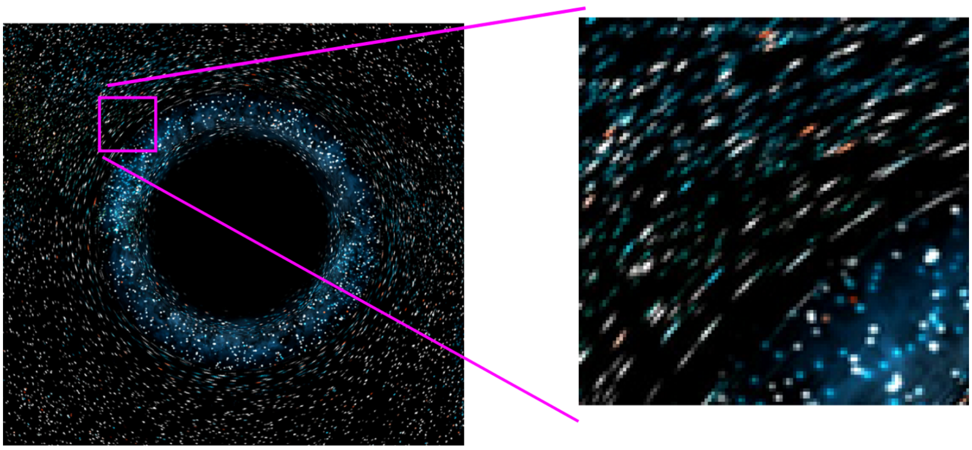

FIGURE 3 – Exemple artistique d'un trou noir vu de loin (zoom sur la partie déformée à droite). (crédit image : European Space Agency, NASA and Felix Mirabel (the French Atomic Energy Commission & the Institute for Astronomy and Space PhysicsConicet of Argentina)).

Pour simuler visuellement un tel ciel étoilé, vous placez tout d'abord une texture d'un ciel étoilé non déformé sur une sphère englobante (la texture consiste en un ensemble de points brillants). Vous souhaitez ensuite déformer ces points brillants en des lignes ou courbes symbolisant la déviation des rayons lumineux autour de la zone du trou noir. Cette déformation a lieu directement dans l'espace image et est réalisée par la carte graphique.

Question 15 (2 points) *Expliquez la procédure suivie. Quels shaders mettez vous en place ? Proposez un algorithme réalisant cet effet. Explicitez vos passage de paramètres. Faites un (ou plusieurs) schéma explicatif.*
Note : Il n'est pas indispensable de respecter scrupuleusement la syntaxe GLSL, mais il faut mettre en avant le principe de codage.

4 Structure de données et algorithmie

Pour sauver l'humanité, on vous demande de trouver très rapidement une autre planète viable pour la vie humaine. Les contraintes sont les suivantes :

- La planète doit être la plus proche possible de la Terre pour limiter le temps du trajet.
- L'étoile la plus proche de cette planète doit être à une distance proche de la distance Terre/Soleil pour avoir une température viable.

Pour cela, vous disposez d'une base de données formée par une liste référençant l'ensemble des étoiles et des planètes.
Pour chaque astre i, la liste contient sa position $\mathbf{p}_i$ dans un référentiel absolu ansi que son type (étoile ou planète).
Cette liste n'est pas ordonnée et contient l'ensemble des planètes et étoiles concaténées les unes derrière les autres sans relation de proximité.

La liste contient $N \simeq 10^{10}$ astres. Votre ordinateur est en mesure de réaliser un calcul de distance entre deux astres en une micro-seconde ($10^{-6}s$).

4.1 Analyse d'algorithme

Un algorithme de type *force brute* permettant de trouver la planète optimale consisterait à calculer la distance entre toutes les paires d'astres, indexer les couples planète+étoiles viables, puis à prendre le couple le plus proche de la Terre.

Question 16 (0.5 point) *Quelle est la complexité de cet algorithme ?*

Question 17 (1 point) *Estimez le temps de calcul d'un tel algorithme ? Est-il raisonnable de tenter une telle approche pour obtenir le résultat avant l'imminente fin du monde ?*

4.2 Structure accélératrice

Question 18 (2 points) *Proposez une structure d'accélération permettant d'obtenir le résultat en un temps acceptable. Donnez un maximum de détails sur votre approche, faite un schéma, évaluez sa faisabilité en terme de temps de calcul et de coût mémoire.*

5 Synthèse

Finalement le calcul réalisé a permis de sauver l'humanité qui vit désormais sur une autre planète. Cette planète est cependant soumise périodiquement à des pluies de météorites qui viennent s'écraser à la surface de celle-ci.

Vous travaillez désormais pour une société d'effets spéciaux de cinéma qui souhaite modéliser dans un film l'apparence de ces pluies de météorites.

Question 19 (6 points) *Décrivez avec le plus de détails possibles quelles techniques et approches vous pensez mettre en oeuvre pour modéliser et animer le plus fidèlement possible cette scène.*
Vous pouvez pour cela créer l'atmosphère de votre choix. Aidez vous de schémas pour décrire les techniques mises en place. Donnez un maximum de détails scientifiques sur les choix à faire, les valeurs de paramètres à prendre, l'approche de calcul (simulation, déformation géométrique, modélisation procédurale, etc).