

Synthèse d'images 5ETI

Seconde session 2011/2012 - CPE

durée 2h.

Tous documents et calculatrices autorisés.

Le barème est donné à titre indicatif.

Illustrez au maximum vos réponses de schémas.

Dans les questions demandant du code/pseudo-code, le respect de la syntaxe exacte C++ n'est pas demandé. L'évaluation portant d'avantage sur l'aspect algorithmique et vos explications.

En cas de doute sur la compréhension de l'énoncé, explicitez ce que vous comprenez et poursuivez l'exercice dans cette logique.

1 Equation différentielle (9 points)

Soit l'équation différentielle

$$x''(t) = a x(t)$$

où a est une constante de \mathbb{R} , et x une fonction scalaire de $t \in \mathbb{R}$.

Question 1 (1 point) *Quelle est la solution générale de cette équation continue ?*

Question 2 (1 point) *Donnez la forme réduite (équation différentielle d'ordre 1) de cette équation en écrivant celle-ci sous la forme*

$$\mathbf{u}' = \mathbf{M}\mathbf{u}.$$

(Vous explicitez \mathbf{u} et \mathbf{M})

Question 3 (1 point) *Montrez que l'utilisation du schéma d'intégration discret d'Euler explicite aboutit à la relation de récurrence :*

$$x_{k+2} - 2x_{k+1} + (1 - a(\Delta t)^2)x_k = 0.$$

Question 4 (2 point) *Analysez en justifiant la stabilité de la solution obtenue par cette approche discrète.*

Question 5 (1 point) *Montrez que ce système modélise un ressort unidimensionnel. A quoi correspond la valeur a ? Que vaut la longueur du ressort au repos ?*

Question 6 (2 point) *Donnez la relation discrète obtenue dans le cas de l'utilisation du schéma de résolution d'Euler implicite d'ordre 1.*

Question 7 (1 point) *Analysez la stabilité de ce cas.*

2 Coordonnées barycentriques (3 points)

Soit le triangle (du plan \mathbb{R}^2) de coordonnées $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (0, 1)$.

Question 8 (2 point) *Dessinez la position des points dont les coordonnées barycentriques valent respectivement :*

- $(0, 0.5, 0.5)$
- $(0.1, 0.8, 0.1)$
- $(-0.1, 0.9, 0.2)$

Soit le point D de coordonnée spatiale $(0.4, 0.2)$.

Question 9 (1 point) *Quels sont les coordonnées barycentriques associées au point D ?*

3 Cas d'étude (8 points)

Nous souhaitons modéliser une scène représentant un feu d'artifice.

Question 10 (8 points) *Décrivez avec le plus de précisions possible votre démarche. Illustrez en particulier votre proposition de schémas et d'algorithmes.*