

## 5ETI Synthèse d'images: Continuité et courbure des surfaces différentiables

CPE Lyon  
damien.rohmer@cpe.fr

2012/2013

Surfaces différentiables

## Notion de topologie

- **Topologie** = Étude de la structure d'un espace indépendamment de sa géométrie.

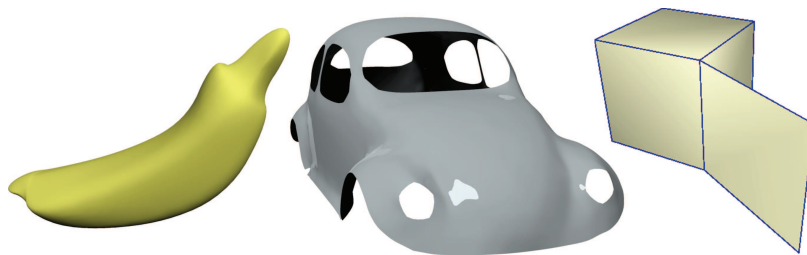
- 2 surfaces sont topologiquement équivalentes si on peut transformer l'une en l'autre par des transformations continues (pas de déchirures ni soudures).



Surfaces différentiables

## Notion de variété

- Une surface  $\Gamma$  est une **2-variété (manifold)** ssi tout point possède un voisinage **homéomorphe** à un (demi) disque.
- Homéomorphisme = application bijective continue + réciproque continue.



Surfaces différentiables

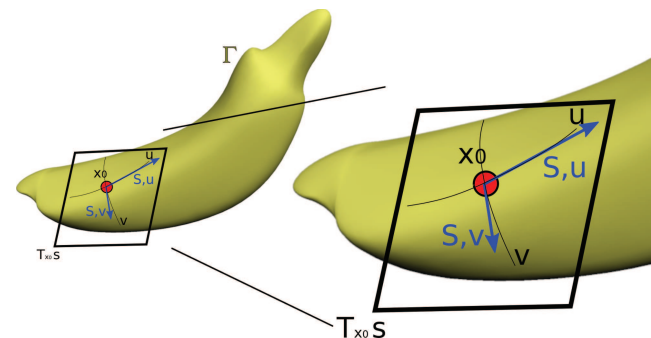
## Notion de continuité

- Soit  $\Gamma$  la surface associée au mapping  $S$ .

$$S : \begin{cases} \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) & \mapsto S(u, v) \end{cases}$$

$$\Gamma = \text{tr}_{\mathcal{D}}(S) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \forall (u, v) \in \mathcal{D}, S(u, v) = \mathbf{x}\}$$

- $S$  est  $\mathcal{C}^1$  ssi  $S_{,u}$  et  $S_{,v}$  sont définies et continues.
- $S$  est  $\mathcal{C}^2$  ssi  $S_{,uu}$ ,  $S_{,vv}$  et  $S_{,uv}$  sont définies et continues.



Surfaces différentiables

## Notion de continuité

- $\Gamma$  est  $\mathcal{G}^1$  ssi

$$\exists (S, \mathcal{D}) \subset \mathcal{C}^1 \times \mathbb{R}^2, \text{tr}_{\mathcal{D}}(S) = \Gamma \\ \Leftrightarrow \text{plan tangent partout}$$

- $\Gamma$  est  $\mathcal{G}^2$  ssi

$$\exists (S, \mathcal{D}) \subset \mathcal{C}^2 \times \mathbb{R}^2, \text{tr}_{\mathcal{D}}(S) = \Gamma \\ \Leftrightarrow \text{courbure continue}$$

Remarque  $S \subset \mathcal{C}^k \neq \Gamma \subset \mathcal{G}^k$ .

$\mathcal{G}^2$  nécessaire pour reflets.

Surfaces différentiables

## Exemple de continuité

$$f : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t \end{cases}, t \in [-1, 0[ \quad \text{et} \quad \begin{cases} x(t) = t/2 \\ y(t) = t/2 \end{cases}, t \in [0, 2]$$

- $f$  est-elle  $\mathcal{C}^2$  ?  $\mathcal{G}^2$  ?

$$g : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \end{cases}, t \in [-1, 0[ \quad \text{et} \quad \begin{cases} x(t) = -t \\ y(t) = -t^2 \end{cases}, t \in [0, 1]$$

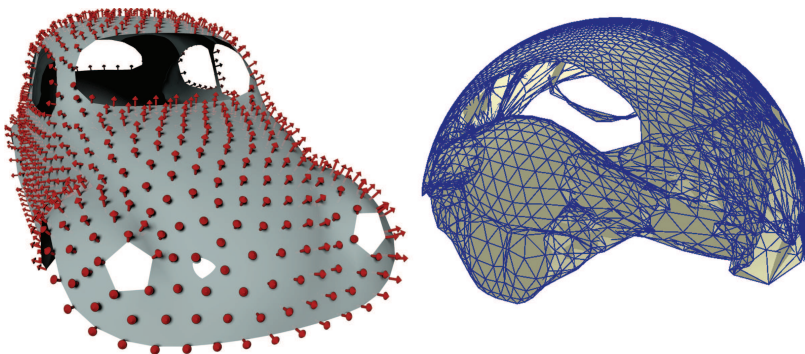
- $g$  est-elle  $\mathcal{C}^2$  ?  $\mathcal{G}^2$  ?

Surfaces différentiables

## Plan tangent

- Surface de  $\mathbb{R}^3$  :  $S(u, v) = (S_x(u, v), S_y(u, v), S_z(u, v))$
- Normale :  $n^S(u, v) = (S_{,u} \times S_{,v}) / \|S_{,u} \times S_{,v}\| \in \mathbb{S}^2$
- Espace tangent de  $S$  en  $x_0$  :  
 $T_{x_0}S = \text{Im}(DS(u, v)) = \{S_{,u}(u, v)h_u + S_{,v}(u, v)h_v \mid (h_u, h_v) \in \mathbb{R}^2\}$ .
- Application de Gauss :

$$N : \begin{cases} \Gamma & \rightarrow \mathbb{S}^2 \\ x_0 = S(u, v) & \mapsto N(x_0) = n(u, v) \end{cases}$$

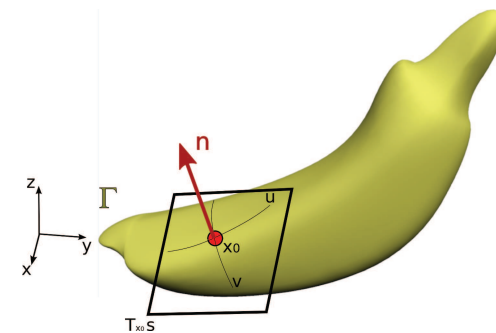


Surfaces différentiables

## Propriétés intégrales

Propriétés intégrales :

- Aire de  $\Gamma$  :  $\int \int_{(u,v) \in \mathcal{D}} \|S_{,u} \times S_{,v}\| du dv$ .
- Volume domaine défini par  $\Gamma$  :  $\int \int_{(u,v) \in \mathcal{D}} S_z(u, v) n_z^S(u, v) du dv$

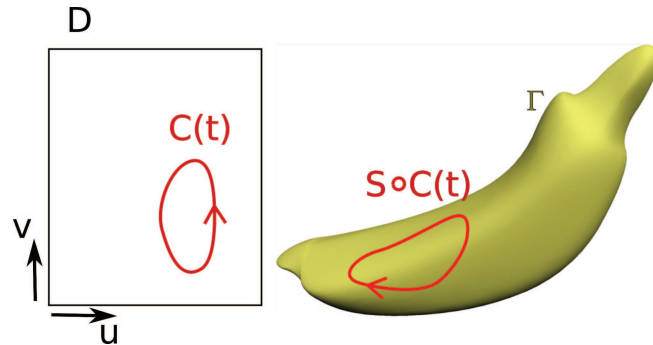


Surfaces différentiables

## Première forme fondamentale

- Courbe  $C \subset \mathcal{D}$  de longueur  $L = \int_t \langle C'(t), C'(t) \rangle^{1/2} dt$ .
- Longueur de  $C_S = S(C_x, C_y)$

$$L_S = \int_t \langle (S \circ C)'(t), (S \circ C)'(t) \rangle^{1/2} dt \\ = \int_t (C'^T(t) I_S(t) C'(t))^{1/2} dt$$



Surfaces différentiables

## Première forme fondamentale

- $I_S$  : Première forme fondamentale / tenseur métrique

$$I_S = \begin{pmatrix} S_{,u}^2 & \langle S_{,u}, S_{,v} \rangle \\ \langle S_{,u}, S_{,v} \rangle & S_{,v}^2 \end{pmatrix}$$

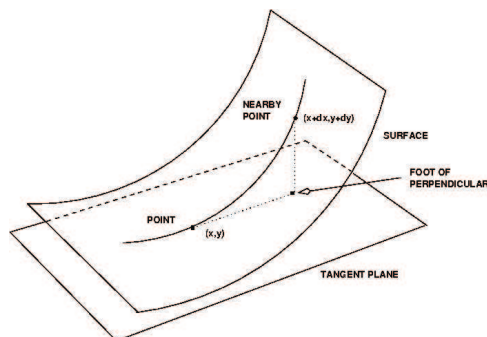
- $I_S$  : forme quadratique associée à  $\langle dS, dS \rangle$
- $\sqrt{\det(I_S)}$  = variation d'aire infinitésimale  
 $\Rightarrow$  Aire de  $\Gamma = \int \int_{(u,v) \in \mathcal{D}} \sqrt{\det(I)} du dv$

Surfaces différentiables

## Seconde forme fondamentale

- II forme quadratique associée à  $-\langle dS, dn \rangle$   
 = développement de Taylor de la surface dans le plan tangent.

$$II_S = - \begin{pmatrix} \langle n_{,u}, S_{,u} \rangle & \langle n_{,u}, S_{,v} \rangle \\ \langle n_{,u}, S_{,v} \rangle & \langle n_{,v}, S_{,v} \rangle \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow II_S = \begin{pmatrix} \langle S_{,uu}, n \rangle & \langle S_{,uv}, n \rangle \\ \langle S_{,uv}, n \rangle & \langle S_{,vv}, n \rangle \end{pmatrix}$$



Wikipedia

Surfaces différentiables

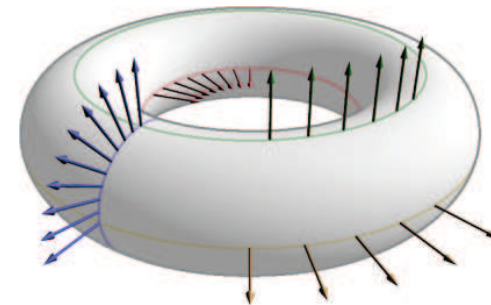
## Application de Weingarten

- Application de Weingarten = Différentielle de l'application de Gauss ( $n$ ) :
- $n_{,u}$  et  $n_{,v}$  sont dans le plan tangent.

$$\begin{cases} \det(I) n_{,u} = (I_1 II_1 - I_2 II_0) S_{,u} + (I_1 II_0 - I_0 II_1) S_{,v} \\ \det(I) n_{,v} = (I_1 II_2 - I_2 II_1) S_{,u} + (I_1 II_1 - I_0 II_2) S_{,v} \end{cases}$$

- Shape operator  $S$  :

$$S = \frac{1}{\det(I)} \begin{pmatrix} I_1 II_1 - I_2 II_0 & I_1 II_0 - I_0 II_1 \\ I_1 II_2 - I_2 II_1 & I_1 II_1 - I_0 II_2 \end{pmatrix}$$

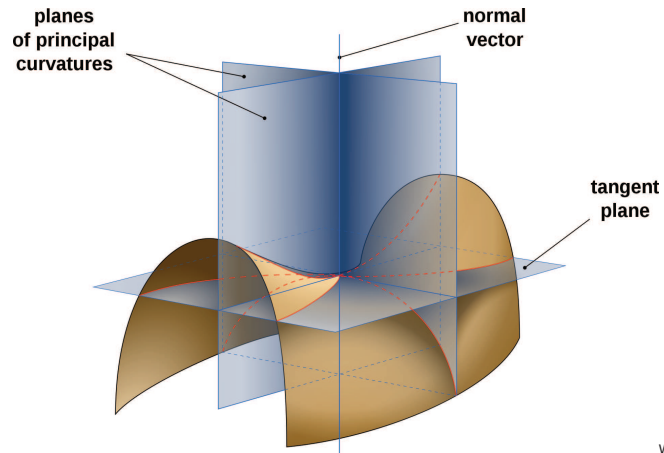


Wikipedia

Surfaces différentiables

## Courbure

- Courbure = variation de la normale  $\Leftrightarrow$  Weingarten
- $S$  diagonalisable :  $S = T^T \text{diag}(\kappa_1, \kappa_2) T$ .
- $(\kappa_1, \kappa_2)$  = courbures principales.
- $T$  = directions des courbures principales.



Wikipedia

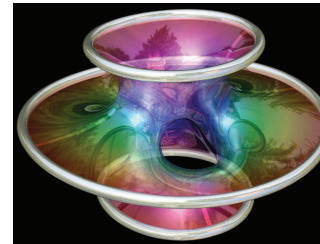
Surfaces différentiables

## Courbures

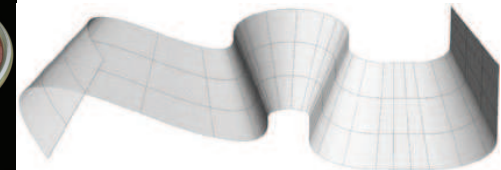
- Courbure Gaussienne :  $K = \kappa_1 \kappa_2 = \det(S) = \frac{\det(\text{II})}{\det(\text{I})}$
- Courbure moyenne :

$$H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) = \frac{1}{2} \text{tr}(S) = \frac{1}{2 \det(\text{I})} (\text{II}_0 \text{I}_2 + \text{I}_0 \text{II}_2 - 2 \text{I}_1 \text{II}_1)$$

- $H = 0 \Rightarrow$  surface minimale
- 2 Surfaces isométriques on le même  $K$
- $K = 0$  Surface développable



© Paul Nylander



M. Nettelbladt

Surfaces différentiables

## Relation intégrale

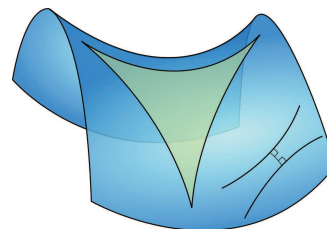
Théorème de Gauss-Bonnet :

$$\int_S K dA + \int_{\partial S} k_g ds = 2\pi \chi(S)$$

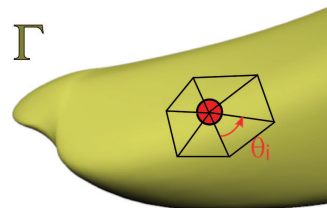
- $k_g$  : courbure géodésique.
- $\chi$  : Caractéristique d'Euler (invariant topologique).

Application pour un polygone au voisinage d'un sommet :

$$\frac{1}{A} \left( \sum_i \theta_i - 2\pi \right) \simeq K$$



Wikipedia



Surfaces différentiables