Synthèse d'images 4ETI
Exercices d'entrainements - *CPE*

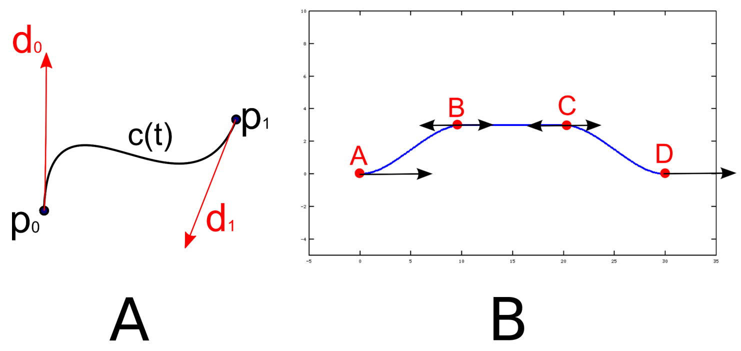

FIGURE 1 – A : Courbe de Hermite ; B : Design d'un pont passant par 4 points.

1 Modélisation de courbes

On rappelle qu'une courbe de Bézier de degré 3 peut s'écrire sous la forme

$$c(t) = \sum_{k=0}^{3} C_3^k \, t^k (1-t)^{3-k} \, A_k \; ,$$

où A_k représente les sommets du polygone de contrôle de la Bézier (points de l'espace 2D ou 3D). En 2D on aura $A_k = (x_k, y_k)$ et, en 3D $A_k = (x_k, y_k, z_k)$ pour $k \in [\![0, 3]\!]$.

1.1 Expression matricielle

Question 1 *Exprimer cette expression sous forme matricielle.*

On pourra écrire

$$\left\{ \begin{array}{l} c_x(t) = \mathbf{a}_x^T \; \mathrm{M} \; \mathbf{u}(t) \\ c_y(t) = \mathbf{a}_y^T \; \mathrm{M} \; \mathbf{u}(t) \\ c_z(t) = \mathbf{a}_z^T \; \mathrm{M} \; \mathbf{u}(t) \end{array} \right.$$

où M *est une matrice à définir,*

$$\mathbf{a}_x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} , \; \mathbf{a}_y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} , \; \mathbf{a}_z = \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} , \textit{et} \;\; \mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} .$$

1.2 Interpolation de Hermite

Une approche commode de définition de courbe consiste à fixer les 2 points extrémaux $\mathbf{p}_0$ et $\mathbf{p}_1$, ainsi que leurs tangentes en ces points $\mathbf{d}_0$ et $\mathbf{d}_1$ (voir fig. 1(A)).

Question 2 *Exprimez la courbe cubique correspondante en fonction des paramètres* $(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{d}_0, \mathbf{d}_1)$.

On appelle ce type d'interpolation, une courbe spline de Hermite cubique.

Question 3 *Donnez le polygone de contrôle de la courbe de Bézier correspondante.*

1.3 Design d'un pont

Nous souhaitons désormais réaliser le design d'un pont. Voici le profil 2D illustré en fig. 1(B). Ce pont est constitué de 3 parties :

1. Une partie montante entre A et B.
2. Une partie plate entre B et C
3. Une partie descendante entre C et D.

La valeur des dérivées en A, B, C, et D sont identiques et valent $\mathbf{d} = (d_x, 0)$. Nous travaillerons dans l'espace 2D.

On pourra considérer $A = (0, 0)$, $B = (10, 3)$, $C = (20, 3)$, $D = (30, 0)$ et $d_x = 10$.

Question 4 *Réalisez la modélisation de ce pont en donnant la ou les courbes polynomiales interpolant les données.*