ETI5 Majeure Image:
Déformations de surfaces

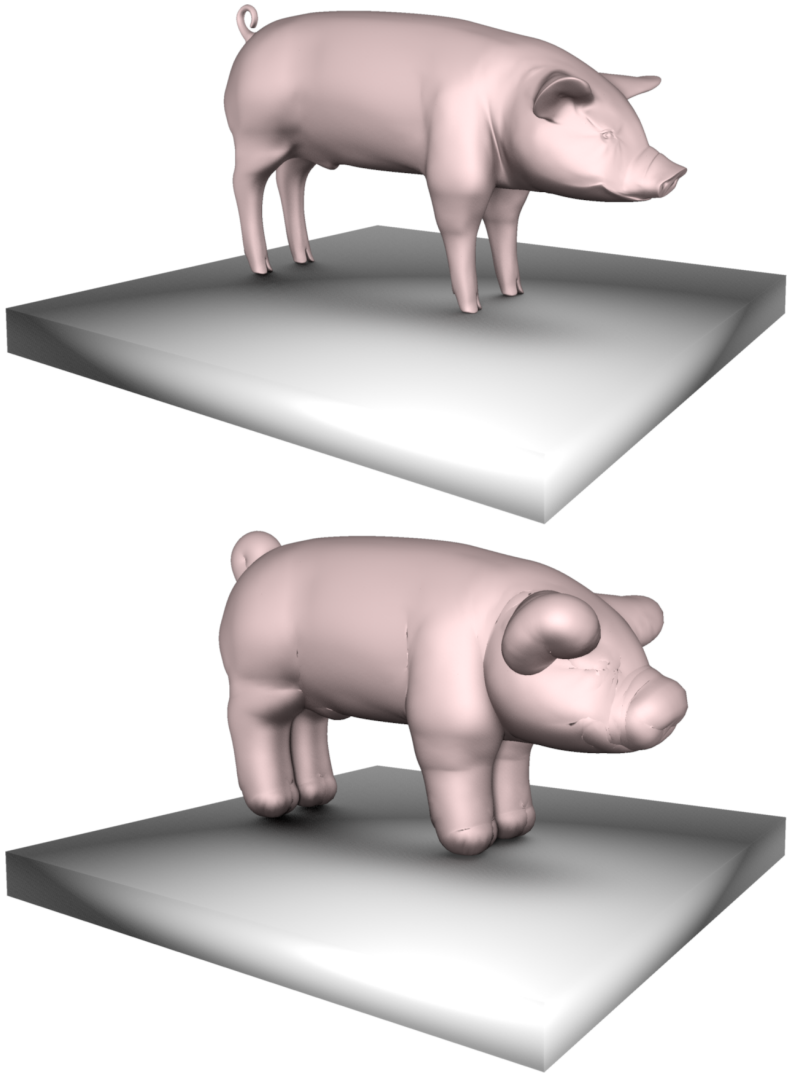
CPE Lyon
damien.rohmer@cpe.fr

01 Decembre 2010

But

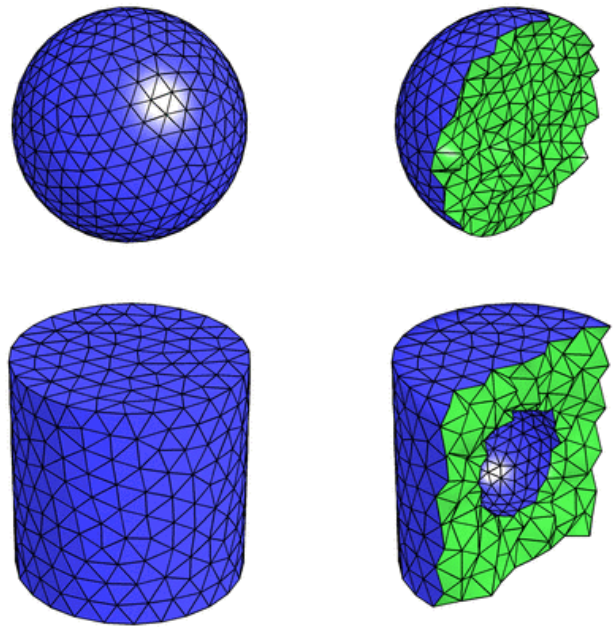
- On cherche à modifier les coordonnées
- Pas la connectivité
  $\Rightarrow$ Changement de Topologie
  = Complexe

```
OFF
40 95 75
-0.175114 -0.047799 -0.046492
-0.199566 0.730914 -0.064795
-0.010689 0.674496 0.008900
-0.015538 0.153071 0.107408
-0.070148 0.767894 -0.116107
-0.053836 -0.702815 0.109714
-0.162416 -0.785481 0.088014
-0.112365 -0.782492 0.135482
-0.240928 0.031451 0.031966
-0.259289 0.200557 0.035420
0.296891 -0.707385 0.143375
-0.190129 -0.069002 0.109358
-0.010148 0.024179 -0.067283
-0.112968 -0.089127 0.092391
-0.185828 0.377372 -0.111155
3 20 4 1
3 34 11 13
3 12 30 0
3 30 13 17
3 23 22 21
3 29 38 17
3 32 0 13
3 14 0 37
3 24 4 21
3 14 32 1
3 24 2 22
3 3 12 25
3 4 24 15
3 21 15 26
3 35 34 13
3 19 32 13
3 19 13 27
```



Déformations : Methodes physiques ?

- On exprime les equations de la physique sur des éléments volumiques (il faut les construire)= equations différentielles sur des tetraèdres linéaires.
- On applique les conditions initiales (forces, paramètres) sur le maillage volumique
- On résout les equations par méthode numérique = Inversion de larges matrices creuses.
- On attend ...
- On réitère sur les paramètres



Déformations : Methode non physique

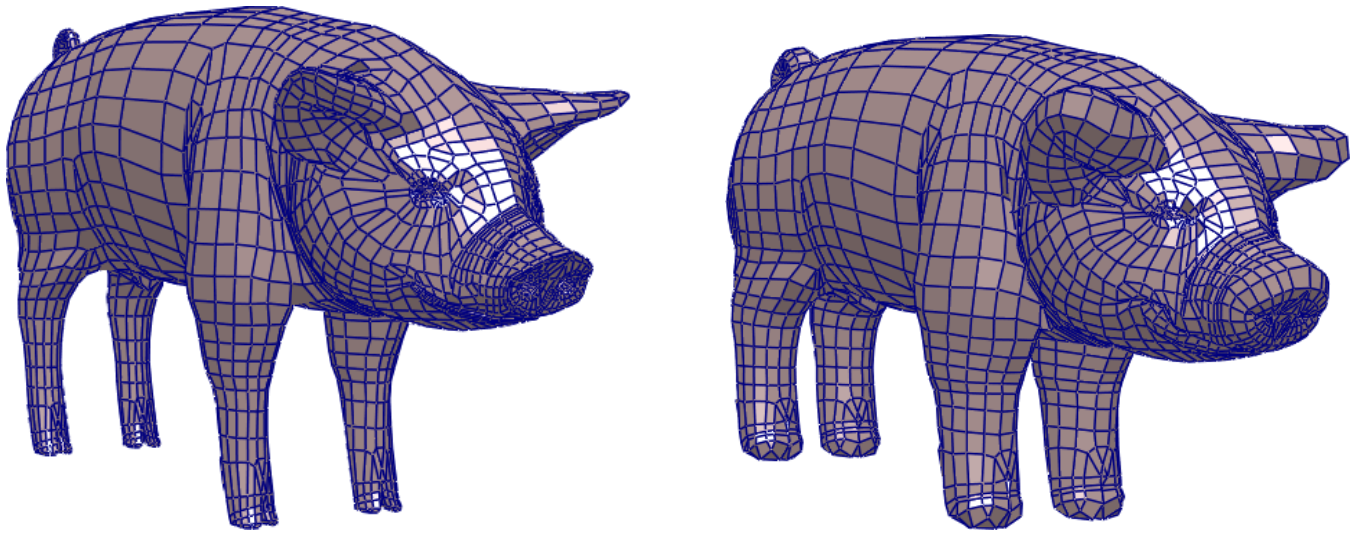
- ⊕ On déplace comme on souhaite ce que l'on souhaite.
- ⊕ Orienté Résultat.
- ⊕ On ne traite que ce qui est visualisé.
- ⊖ On introduit des procédés non réalistes physiquement.
  $\Rightarrow$ Contraintes

Déformation d'un maillage

- Animation - Deformation de surface
  = trouver f tel que

$$(x'_0, x'_1, x'_2, ..., x'_n) = f(x_0, x_1, x_2, ..., x_n)$$

On affiche le maillage formé par $(x'_0, ..., x'_n)$ avec l'ancienne connectivité.



- Comment choisir f ?

Fonction de Deformations

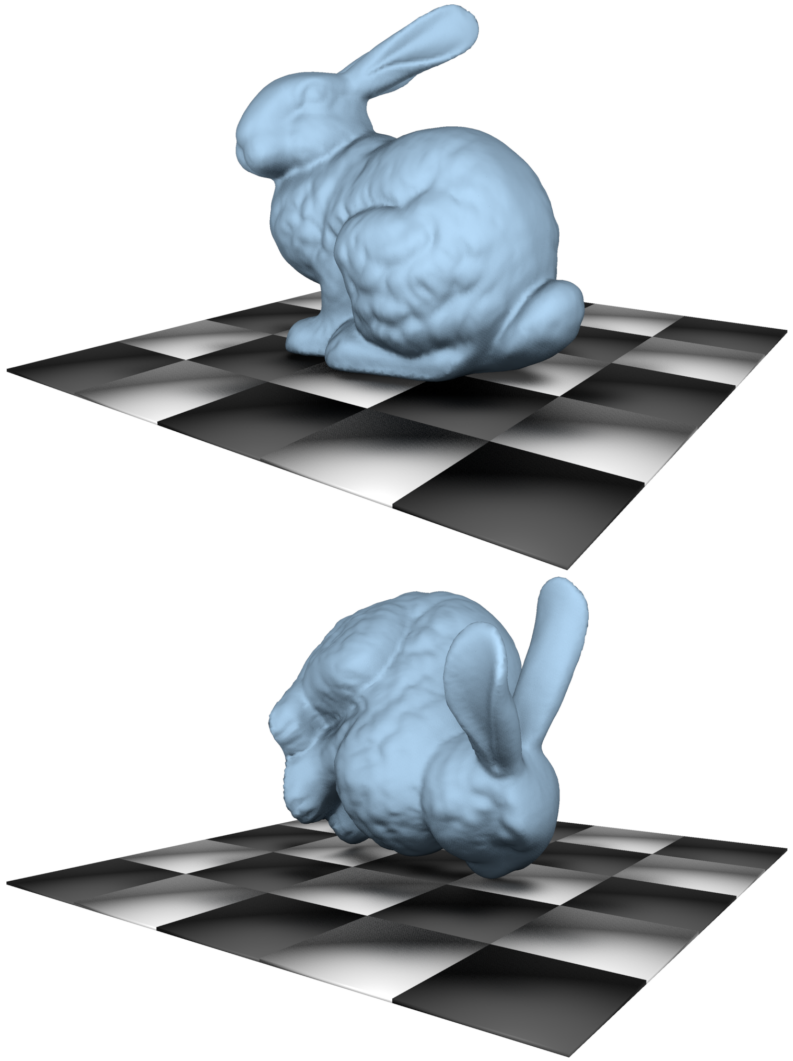
- On maitrise assez peu de transformations f

$$f : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^3$$

- On prend f linéaire : $f = \mathrm{M}$.
- Isométries
  - Translation
  - Symétries
  - Rotations

  $\mathbf{x}' = \mathrm{M}\mathbf{x}$ et $|\det(\mathrm{M})| = 1$
- Les homothéties

$$\mathbf{x}' = \mathrm{diag}(s_1, s_2, s_3)\mathbf{x}$$



Important !

Rotation autour d'un axe n par un angle ϕ !

$$R(\mathbf{n},\phi) = \begin{pmatrix} \cos(\phi) + n_x^2(1-\cos(\phi)) & n_x n_y(1-\cos(\phi)) - n_z\sin(\phi) & n_y\sin(\phi) + n_x n_z(1-\cos(\phi)) \\ n_z\sin(\phi) + n_x n_y(1-\cos(\phi)) & \cos(\phi) + n_y^2(1-\cos(\phi)) & -n_x\sin(\phi) + n_y n_z(1-\cos(\phi)) \\ -n_x\sin(\phi) + n_x n_z(1-\cos(\phi)) & n_x\sin(\phi) + n_y n_z(1-\cos(\phi)) & \cos(\phi) + n_z n_z(1-\cos(\phi)) \end{pmatrix}$$

- Rotation Globale

$$\forall i, \mathbf{x}'_i = \mathrm{R}\,\mathbf{x}_i$$

- Revient au même qu'une expression par quaternion. (interpolations)

Rotation

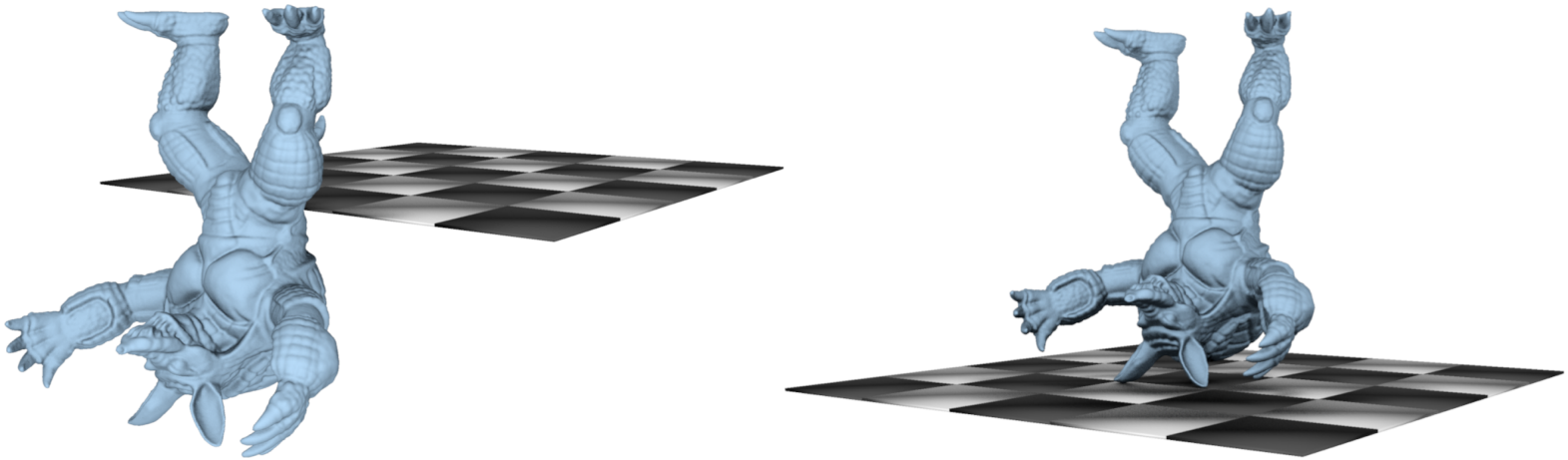
Ne pas oublier de centrer la rotation

$$\mathbf{x}' = \mathrm{R}\,(\mathbf{x} - \mathbf{x_0}) + \mathbf{x_0}$$

Ou sous forme matricielle

$$\mathbf{x}' = \mathrm{T}\,\mathrm{R}\,\mathrm{T}^{-1}\mathbf{x}$$

T est une simple translation, ou un changement de base locale !
(Inversion de matrice 3×3 est connu explicitement)



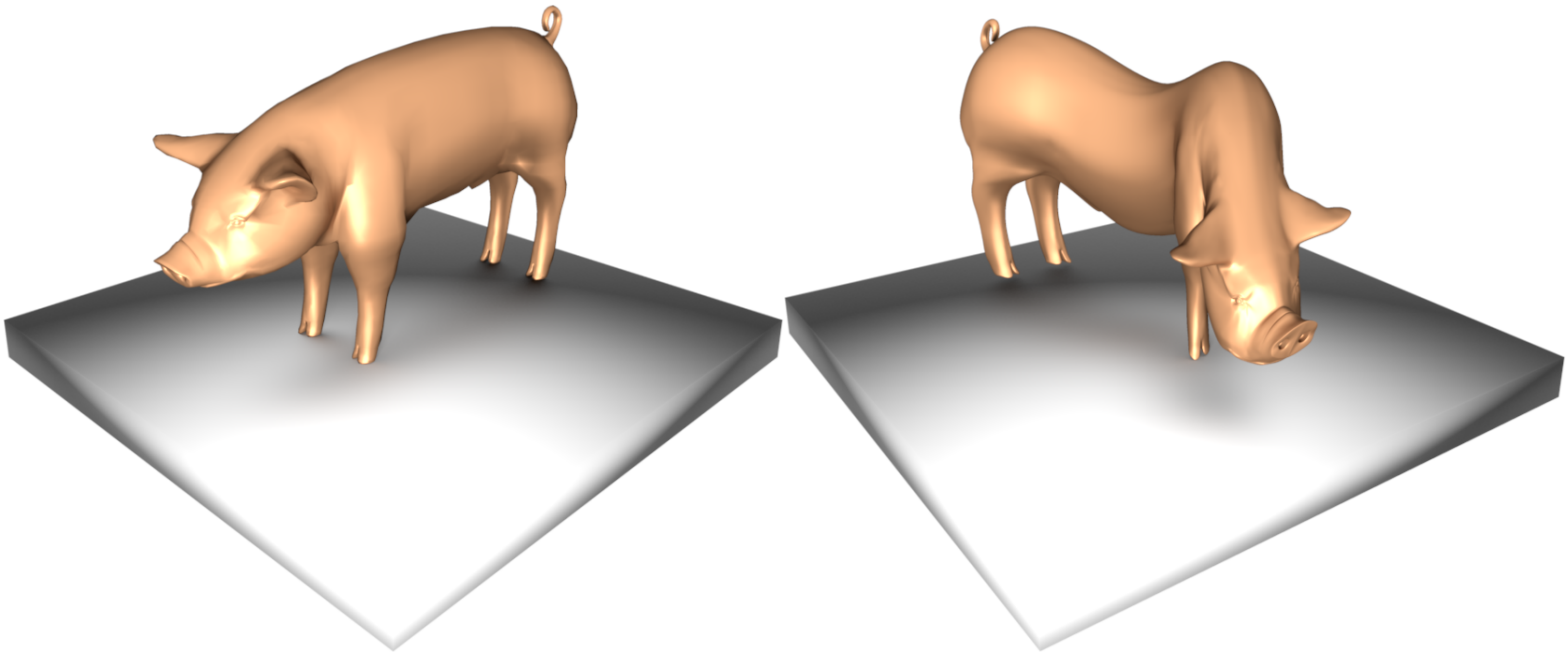
Transformations rigides

Utilisation supplémentaire :

- On peut faire varier les paramètres de la transformation dans l'espace !

$$f : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbf{x}' = \mathrm{M}(\mathbf{x})\,\mathbf{x}$$

Ex. Translation dépendant de la position :



Transformations rigides

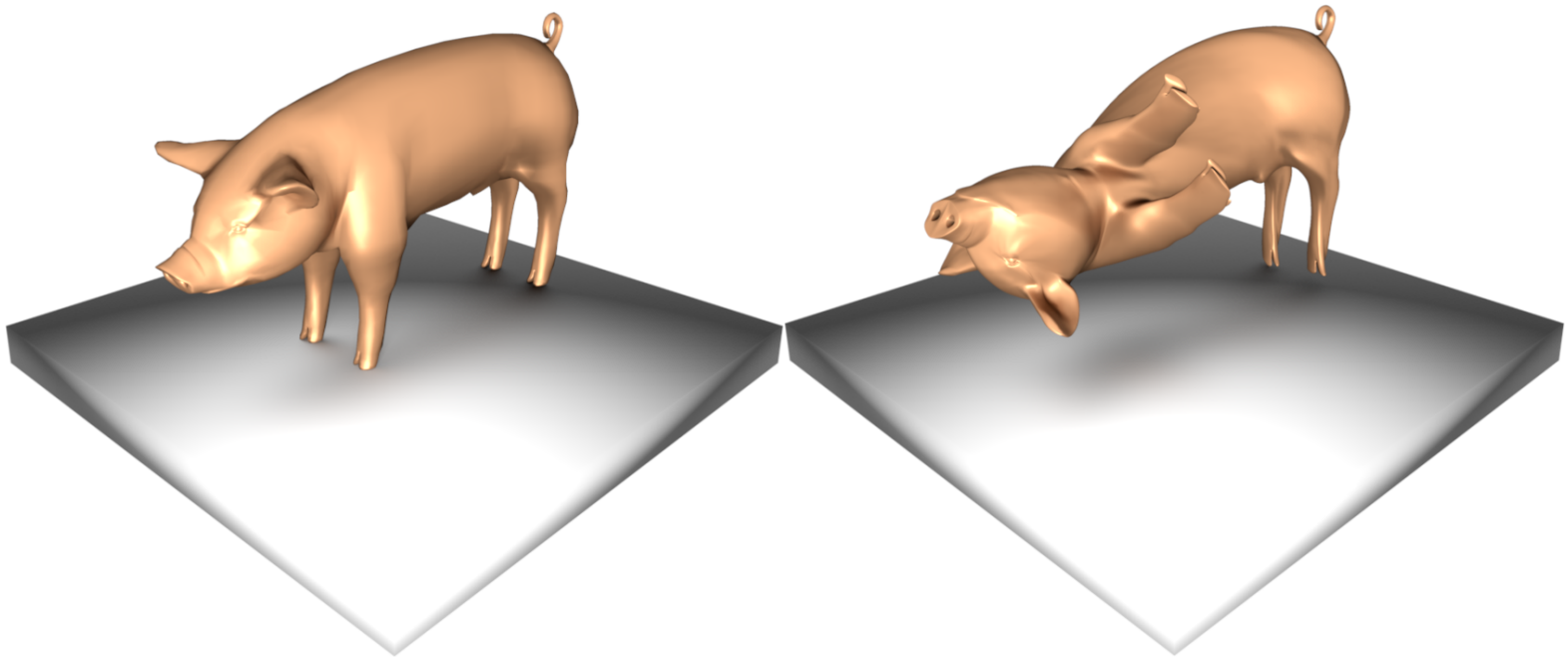
- Angle de rotation qui varie

$$\forall i, \mathbf{x_i}' = R\left(\mathbf{n}, \frac{z}{z_{max}}\right) \mathbf{x}_i$$

```
for(k=0;k<N;k++)
 {
   Vec x = mesh.get_vertex(k);
   double angle = x[0] * PI * time;
   Matrix R = Matrix::rotation(Vec(1,0,0),angle);
   mesh.set_vertex(k,R*x);
 }
```

Transformations rigides : Exemple

Exemple de Rotation d'angle variable



Interpolation de rotations

- Interpolation de matrices pas ok

$$\mathrm{M} = \alpha \mathrm{R}_1 + (1 - \alpha)\mathrm{R}_2 \notin \mathrm{SO}(3)$$

- Problème : Interpolation dans espace non Cartésien (Sphère unitée = variété).

$\Rightarrow$ Généralisation de l'interpolation linéaire dans un **groupe de Lie** :

$$\mathrm{R} = \left(\mathrm{R}_2 \mathrm{R}_1^{-1}\right)^{\alpha} \mathrm{R}_1$$

- Exponentielle de matrices

Quaternion

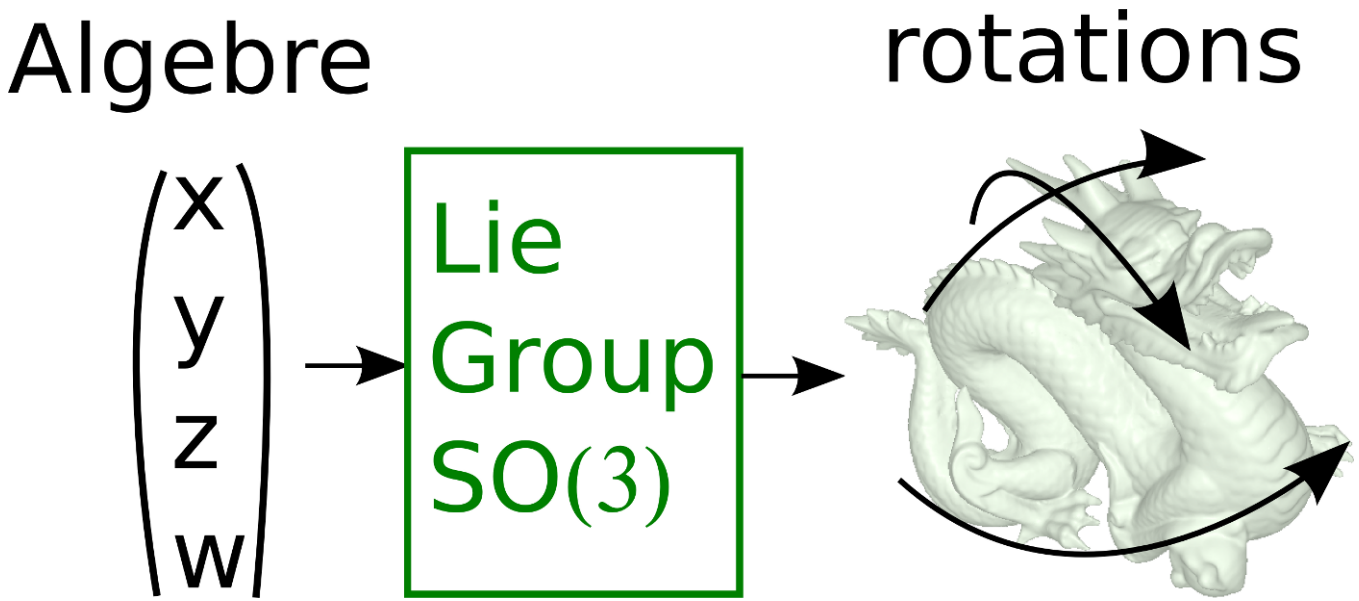
- Quaternions : Rotation axe n, angle θ.

$$q = (n_x \sin(\theta), n_y \sin(\theta), n_z \sin(\theta), \cos(\theta)) \in \mathbb{R}^4$$

$\Rightarrow$ Représentation concise rotation (quaternion unitaires).

$\Rightarrow$ Généralisation nombres complexes : $q = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}$.

- Produit de rotation : $q_1 q_2 \Leftrightarrow \mathrm{R}_1\mathrm{R}_2$ (non commutatif)



Quaternion

- Quaternion $q = (q_0, q_1, q_2, q_3) \Rightarrow$ Matrice R :

$$\mathrm{R} = \begin{pmatrix} 1 - 2(q_1^2 + q_2^2) & 2(q_0 q_1 - q_3 q_2) & 2(q_0 q_2 + q_3 q_1) \\ 2(q_0 q_1 + q_3 q_2) & 1 - 2(q_0^2 + q_2^2) & 2(q_1 q_2 - q_3 q_0) \\ 2(q_0 q_2 - q_3 q_1) & 2(q_1 q_2 + q_3 q_0) & 1 - 2(q_0^2 + q_1^2) \end{pmatrix}$$

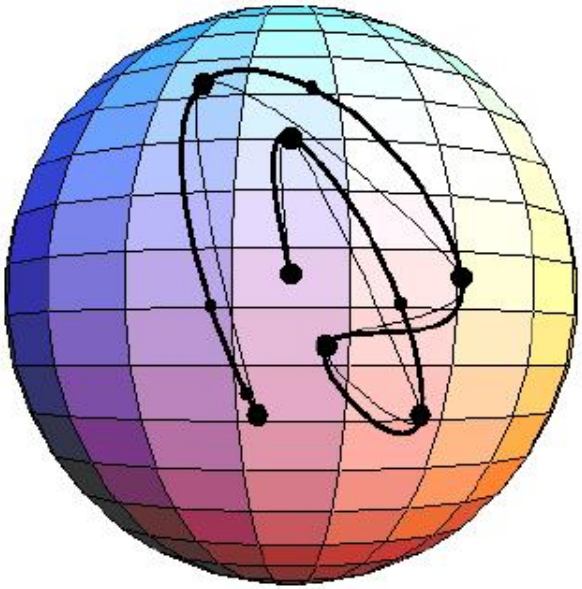
- Représentation concise multiplications : $q = (\mathbf{v}, w)$

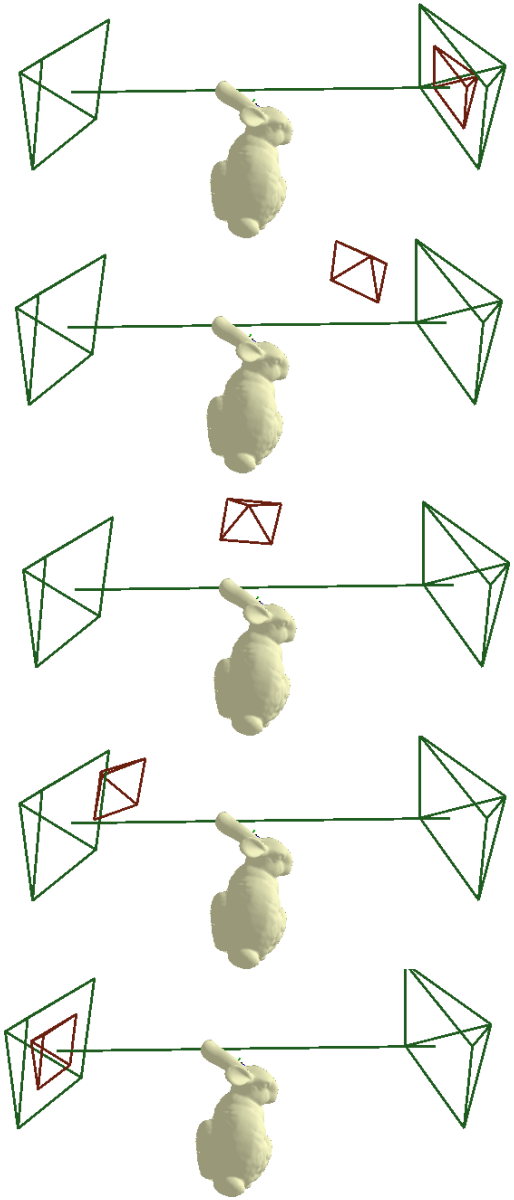
$$q_1 q_2 = (w_0 \mathbf{v}_1 + w_1 \mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_0 \times \mathbf{v}_1, w_0 w_1 - \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_1)$$

Interpolation de rotations

- Interpolation sans exponentielle de matrices : (SLERP) *Spherical Linear intERPolation*

$$\begin{cases} SLERP(q_0, q_1, \alpha) = \\ \quad \frac{\sin(\alpha(1-\theta))}{\sin(\theta)} q_0 + \frac{\sin(\alpha\theta)}{\sin(\theta)} q_1 \Leftrightarrow (\mathrm{R}_1\mathrm{R}_0)^{\alpha}\mathrm{R}_1 \\ \cos(\theta) = q_0 \cdot q_1 \end{cases}$$





Transformation rigides

- ⊖ Transformations non locales.
- ⊖ Axe et angle variable des rotations : complexe à manipuler

- ⇒ On utilise des transformations constantes
- ⇒ On les rend locales artificiellement morceaux par morceaux

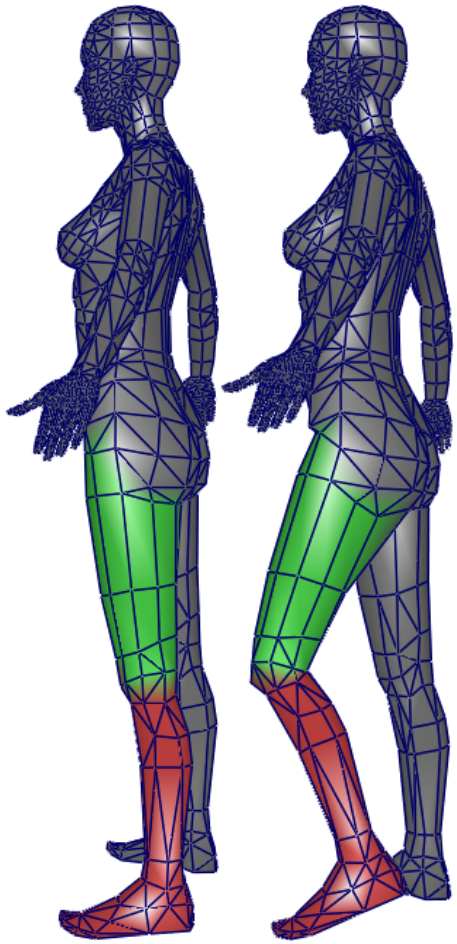
$$\forall i,\ \mathbf{x}'_i = \mathrm{M}(\mathcal{E}(i))\,\mathbf{x}$$

Et $\mathrm{M}(\mathcal{E}(i)) = \mathrm{I}$ pour les ensembles non déformés.
$\mathcal{E}(i) =$ segmentation du maillage.

Transformation locales

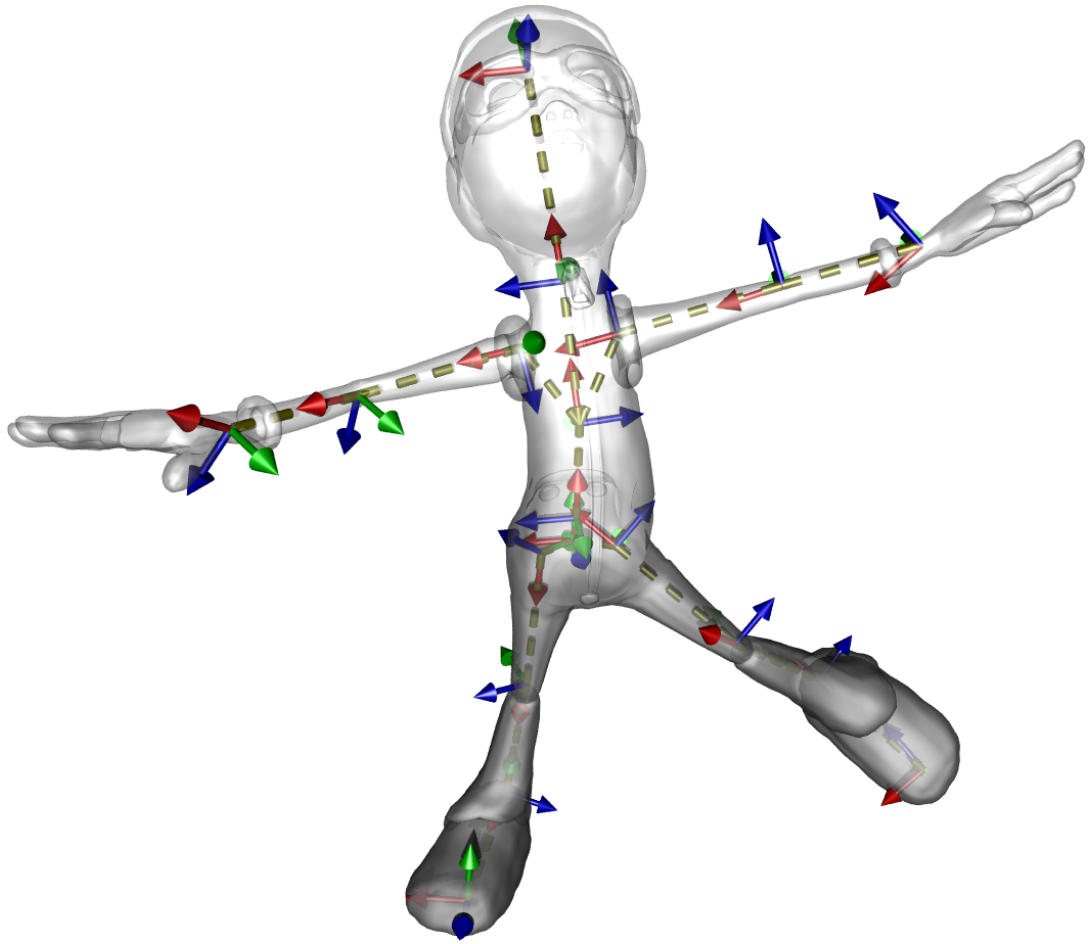
- On définit des régions $\mathcal{E}$
- On applique une transformation différente sur chaque partie $\mathrm{M}(\mathcal{E})$
- On utilise principalement des rotations. $\mathrm{R}_{\mathcal{E}}$

$\Rightarrow$ Comment définir les paramètres de la transformation ?



Squelette d'animation

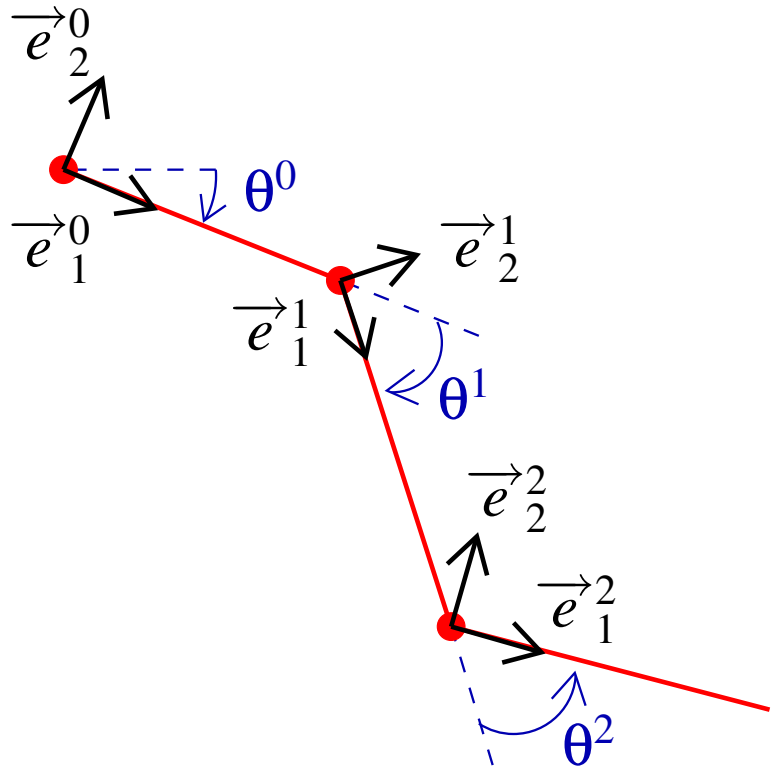
- Objets sont articulés autour d'un squelette d'animation.
- Squelette = Ensemble de repères hiérarchiques.
- Orientation par rotations successives.



Squelette d'animation

- Transformations hiérarchiques.

$$
\begin{aligned}
T_0 &= R_0 \\
T_1 &= T_0 M_1 R_1 M_1^{-1} = R_0 M_1 R_1 M_1^{-1} \\
T_2 &= T_1 M_2 R_2 T_2^{-1} = \dots \\
&\vdots \\
T_i &= \prod_{k=0}^{i} M_k R_k M_k^{-1}
\end{aligned}
$$

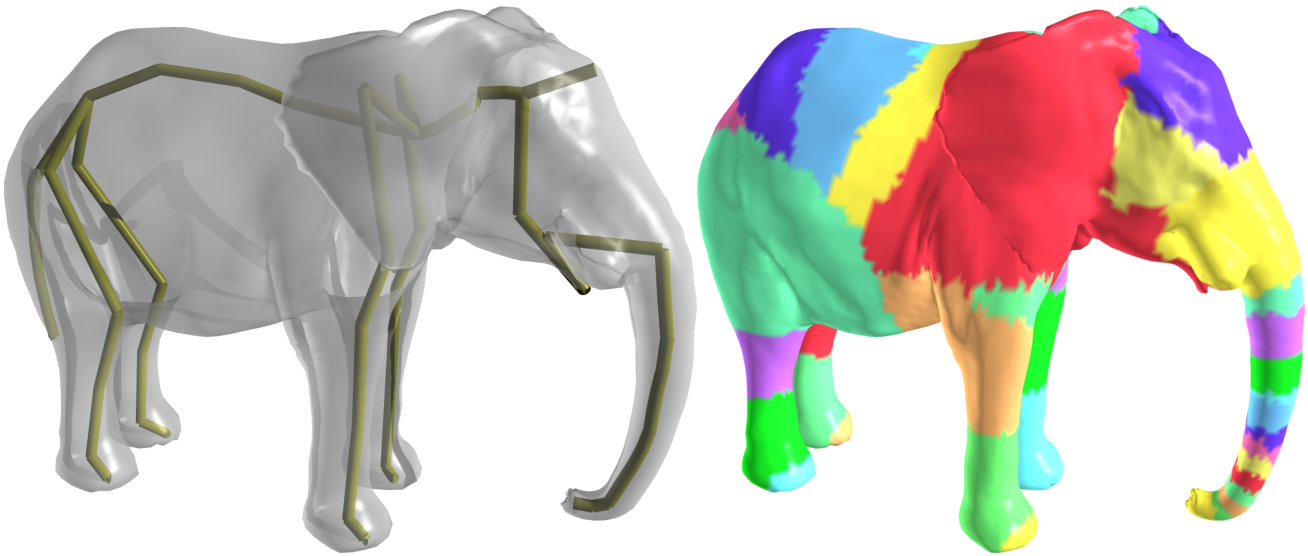


Skinning Rigide

- On lie un morceau local de la surface à un repère du squelette.
- Transformation du repère appliquée sur tous les points du morceau.

$$\mathbf{x}_i(t) = \mathrm{T}_{\mathcal{E}(i)}(t)\,\mathrm{T}^{-1}_{\mathcal{E}(i)}(0)\,\mathbf{x}_i(0)$$

$\mathrm{T}(0)$ = Bind Pose.



Squelette

```
class Frame
{
 Matrix R;
 Matrix Bind;
 Joint *father;
 std::list <Joint*> son;
}
```

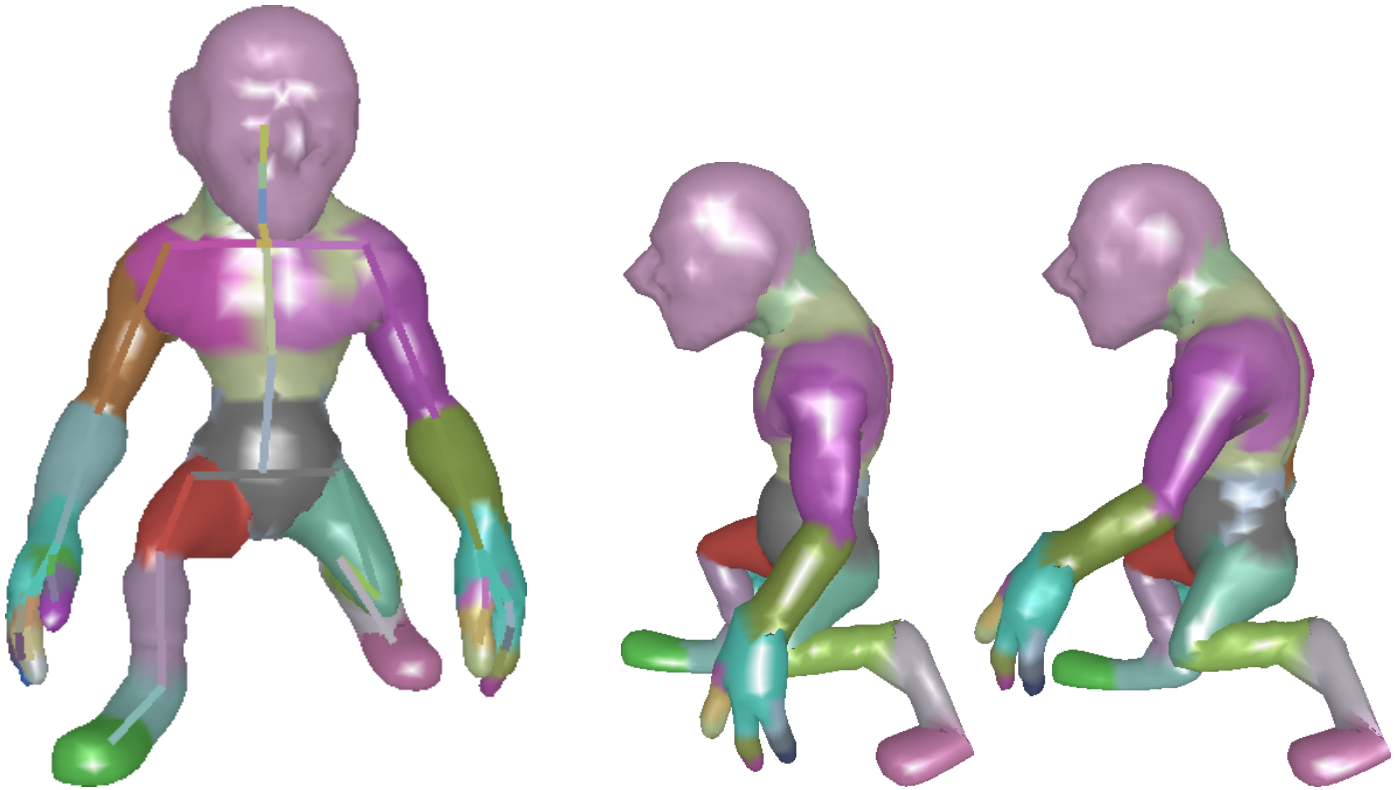
```
for(k_vertex=0;k_vertex<N_vertex;k_vertex++)
{
  int bone_dependency =
     skinning.bone_dependency(k_vertex);
  Matrix T = skeleton.get_matrix(bone_dependency);
  Matrix B =
     (skeleton.get_bind_pose(bone_dependency)).invert();
  deformed_mesh(k_vertex) = T*B * mesh(k_vertex);
}
```

Skinning Rigide : Exemple

- Action Hierarchique du Squelette

$$\mathbf{x}(t) = \mathrm{M}\,\mathbf{x}(0)$$

Ex. Une rotation $\mathrm{R}_3 = R((1,0,0),45)$



Avantage Skinning

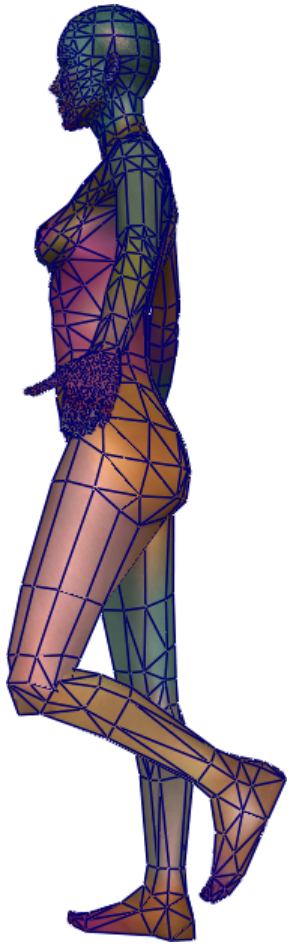
Le squelette est

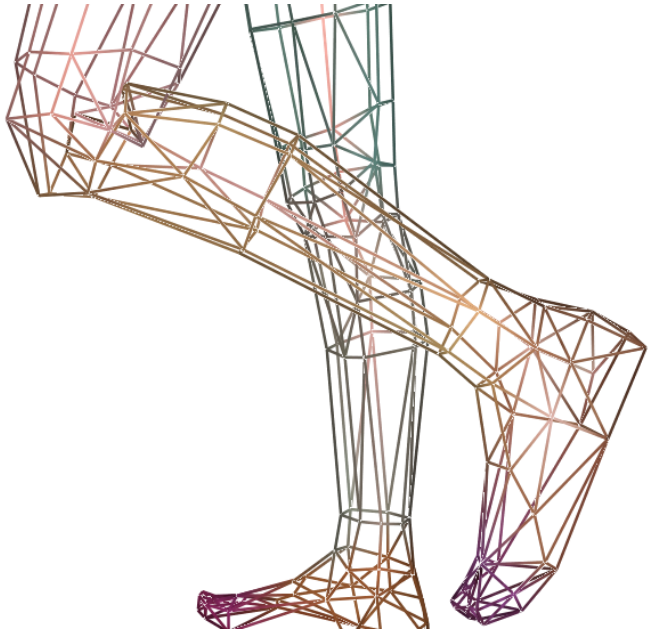
- ⊕ Facile à construire
- ⊕ Facile à animer
- ⊕ Intuitif pour animer un personnage.

Inconvénients Skinning

Mais :

- ⊖ Discontinuités





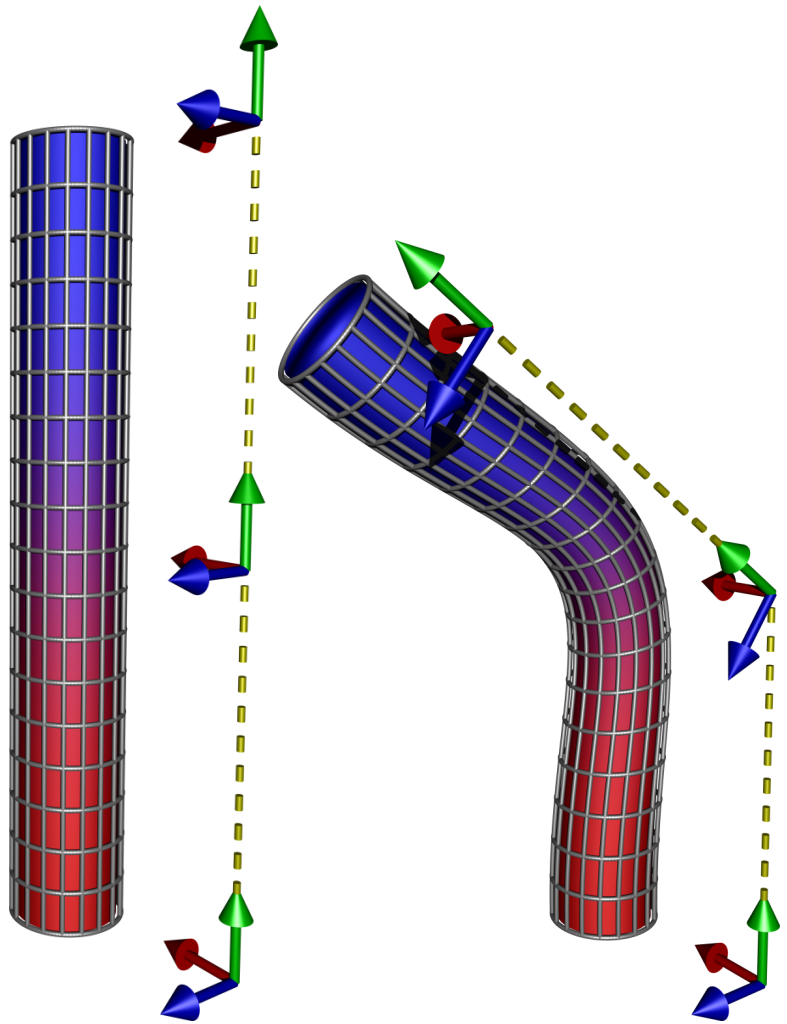
Interpolation des Transformations

Idee : Il faudrait interpoler les transformations entre les repères.

- Le plus simple :

$$T = \omega T_0 + (1 - \omega) T_1$$

- Comment définir les ω ?

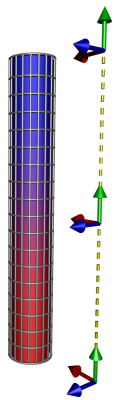


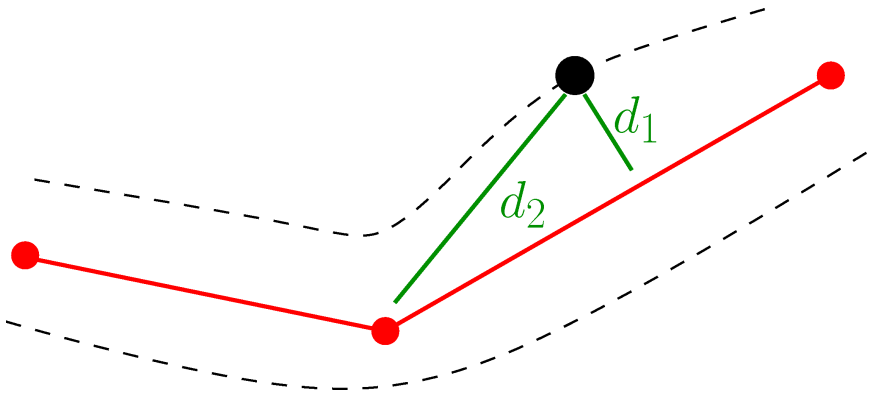
Poids de Skinning

Méthode Possible :

- Fonction de la distance au squelette puis on normalise.

$$\alpha_1 = \frac{1}{d_1}$$
$$\alpha_2 = \frac{1}{d_2}$$
$$\omega_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}$$
$$\omega_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}$$





Distance cylindrique

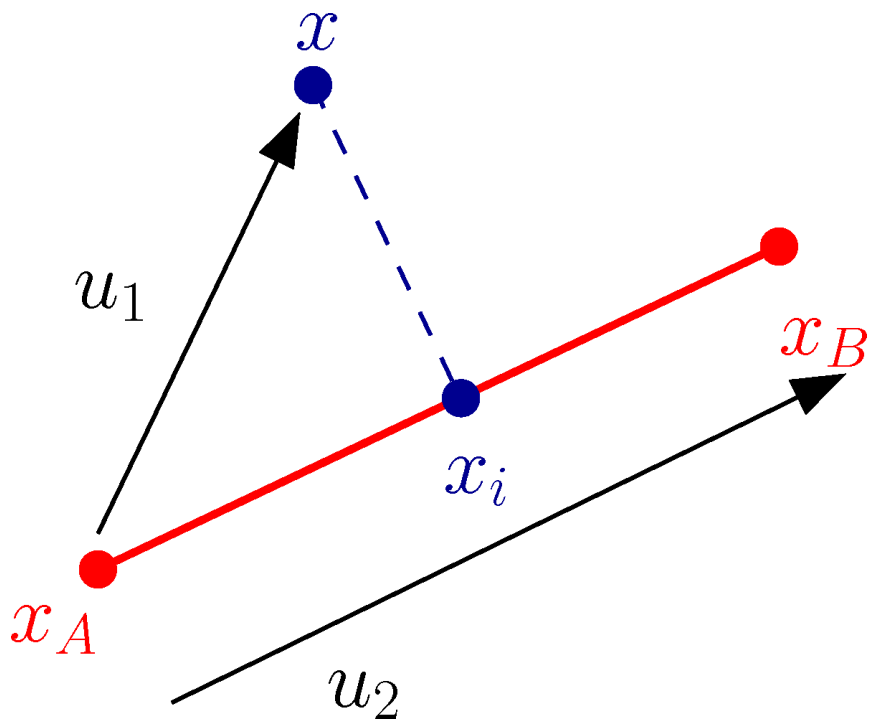
Distance d'un point $\mathbf{x}$ à un segment [AB].

$\mathbf{u_1} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_A \quad , \quad \mathbf{u_2} = \mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A$

$$p = \frac{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|^2}$$

Si $p < 0$ $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_A$
Si $p > 1$ $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_B$
Sinon $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_A + p\mathbf{u}_2$.

$$d = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|$$



Structure de données : Poids de Skinning

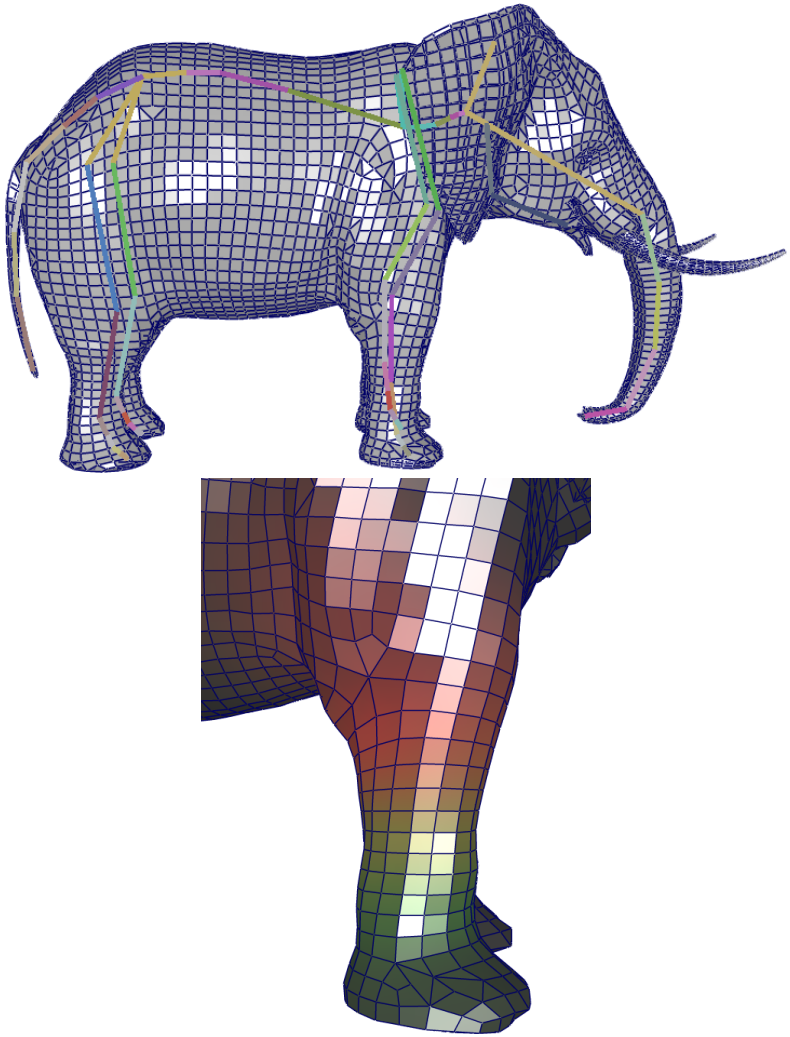
- Pour tout sommet i, on associe les couples (os,poids) : $(b_k, \omega_k)_{k \in \mathcal{E}(i)}$.

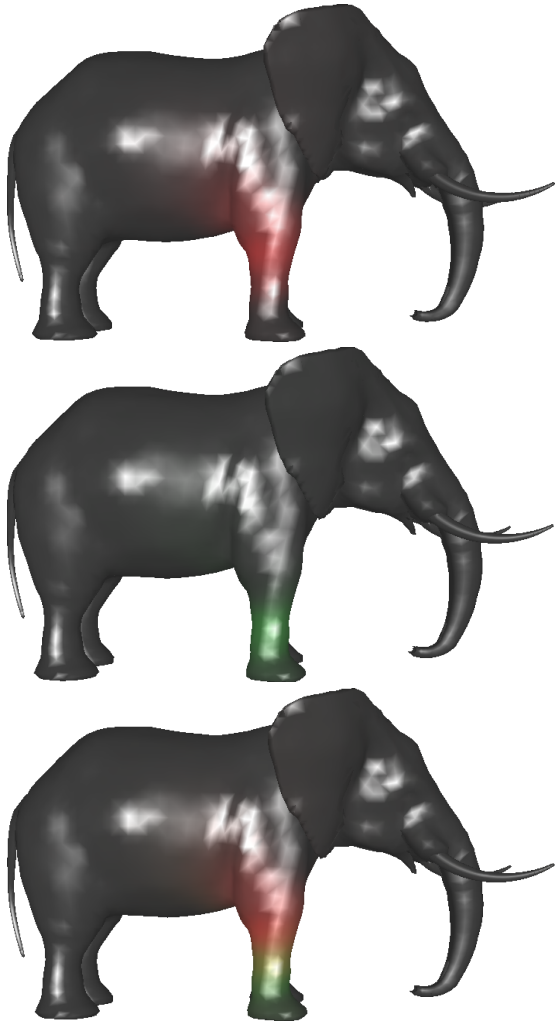
```
std::vector <std::vector <int>> bone_dependencies;
std::vector <std::vector <double>> skinning_weights;

for(k_vertex=0;k_vertex<N_vertex;k_vertex++)
{
  N_dep = bone_dependencies[k_vertex].size();
  for(k_dep=0;k_dep<N_dep;k_dep++)
  {
    bone = bone_dependencies[k_vertex][k_dep];
    weight = skinning_weight[k_vertex][k_dep];
  }
}
```

Calcul des Poids

```
//skinning weights
for(k_vertex=0;k_vertex<N_vertex;k_vertex++)
{
  for(k_bone=0;k_bone<N_bone;k_bone++)
  {
    alpha = push_back(1/distance(k_vertex,k_bone));
    if(alpha>epsilon)
    {
      skinning_weights[k_vertex].push_back(alpha);
      bone_dependencies[k_vertex].push_back(k_bone);
    }
  }
  norm_skinning_weights();
}
```

Exemples



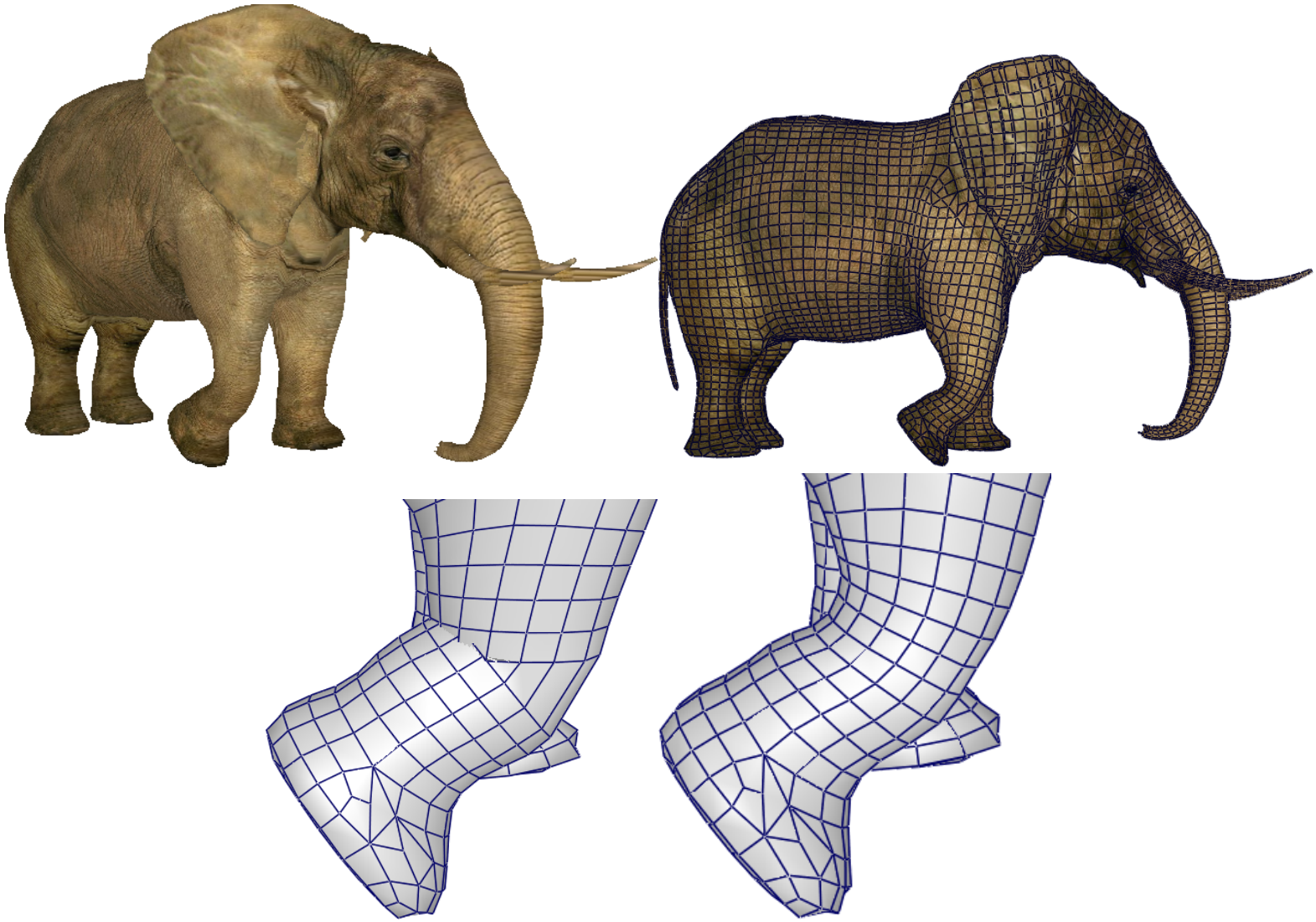


Skinning Lisse

$$\mathbf{x} = \left(\sum_i \omega_i \mathrm{M}_i \right) \mathbf{x}_0$$

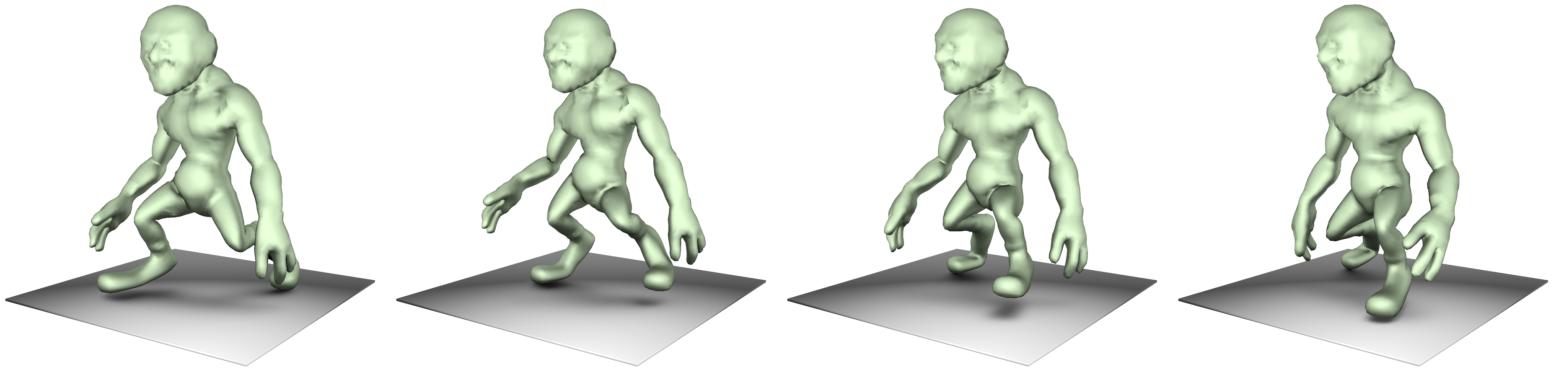
```
for(k_vertex=0;k_vertex<N_vertex;k_vertex++)
{ int N_dep = bone_dependencies[k_vertex].size();
  Matrix D;
  for(k_dep=0;k_dep<N_dep;k_dep++)
  { int k_bone = bone_dependency[k_vertex][k_dep];
    double weight = skinning_weights[k_vertex][k_dep];
    D += weight*skeleton.matrix(k_bone);}
  deformed_mesh(k_vertex) = D * mesh(k_vertex);
}
```

Exemples



Animation

- Animation = Les angles des rotations de M dépendent du temps.



```
+ <animation id="ele_R_shoulder_rotateY"></animation>
+ <animation id="ele_R_shoulder_rotateZ"></animation>
+ <animation id="ele_R_elbow_rotateX"></animation>
- <animation id="ele_R_elbow_rotateY">
  - <source id="ele_R_elbow_rotateY_ele_R_elbow_rotateY_ANGLE-input">
    - <float_array id="ele_R_elbow_rotateY_ele_R_elbow_rotateY_ANGLE-input-array" count="134">
        0.040000 0.080000 0.120000 0.160000 0.200000 0.240000 0.280000 0.320000 0.360000 0.400000 0.440000 0.480000 0.520000
        0.560000 0.600000 0.640000 0.680000 0.720000 0.760000 0.800000 0.840000 0.880000 0.920000 0.960000 1.000000 1.040000
        1.080000 1.120000
      </float_array>
    </source>
  - <source id="ele_R_elbow_rotateY_ele_R_elbow_rotateY_ANGLE-output">
    - <float_array id="ele_R_elbow_rotateY_ele_R_elbow_rotateY_ANGLE-output-array" count="134">
        0 -0.072670 -0.223444 -0.389830 -0.549435 -0.692583 -0.812962 -0.905247 -0.964565 -0.985765 -0.985721 -0.985668 -0.985607
        -0.985540 -0.961561 -0.887361 -0.755854 -0.560878 -0.285142 -0.201935 -0.173549 -0.175789 -0.182313 -0.192826 -0.207032
        -0.224636
      </float_array>
```

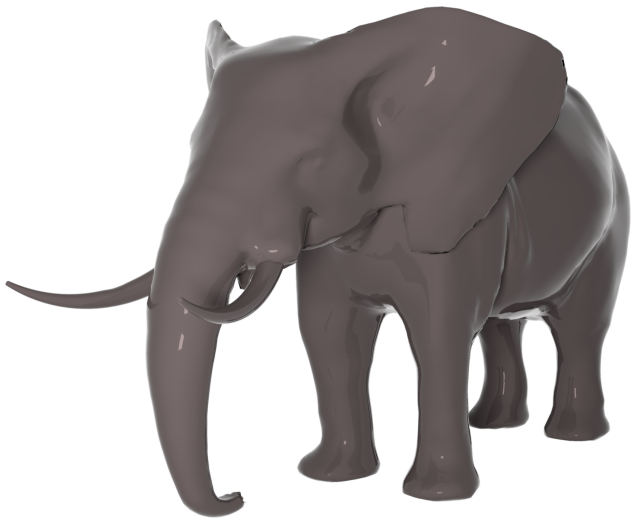
Skinning Lisse : Conclusion

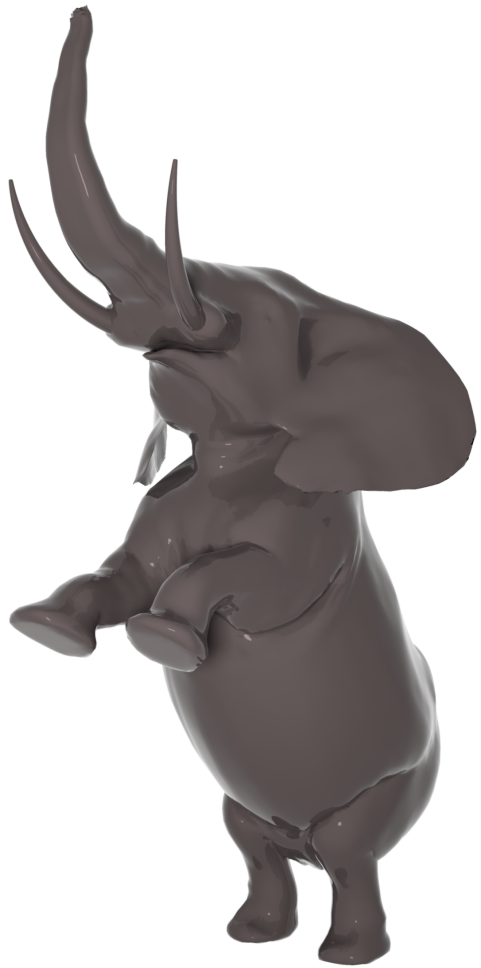
Avantages

- ⊕ Calcul Rapide.
- ⊕ Squelette intuitif à paramétrer.

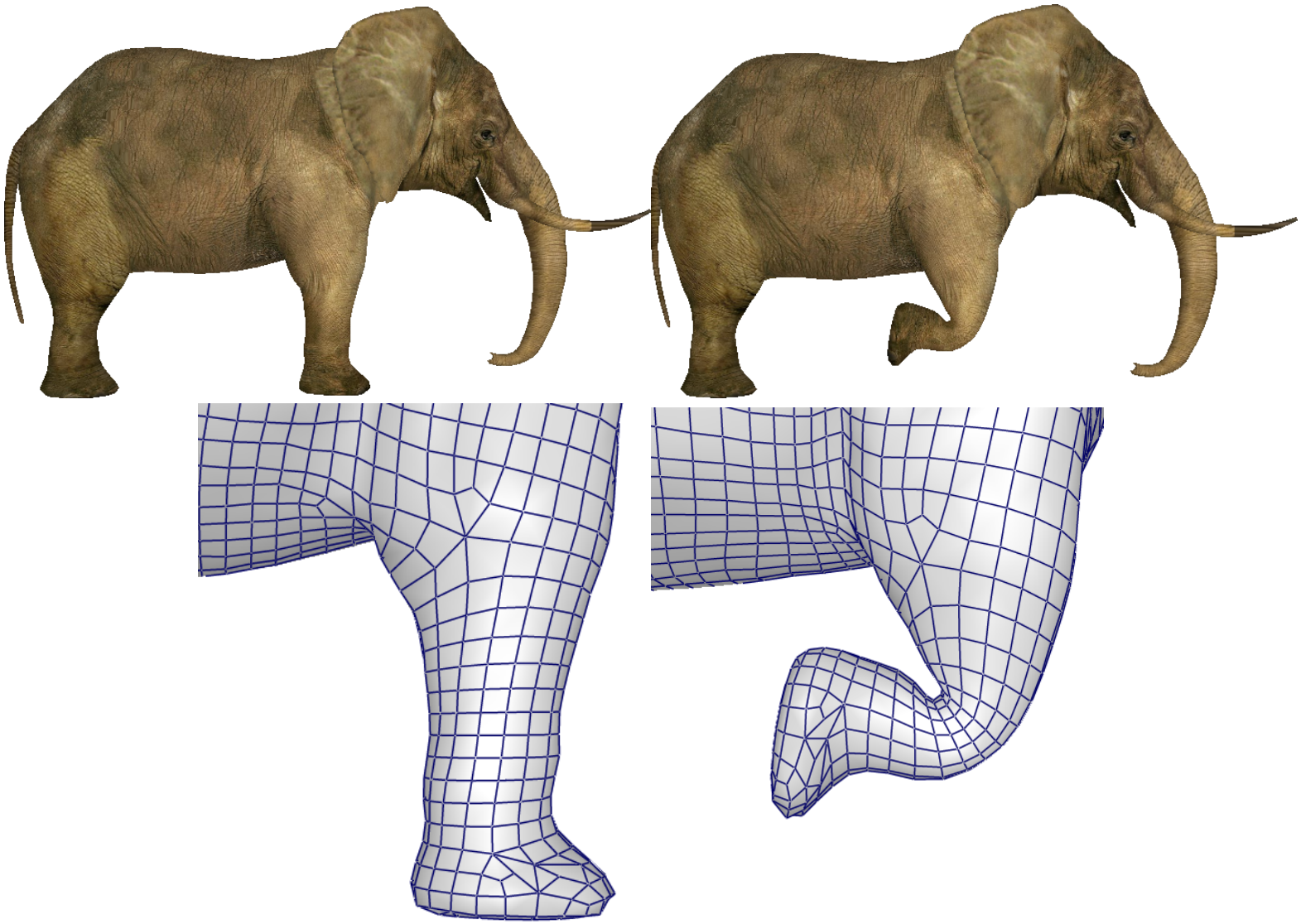
inconvénients

- ⊖ Artefacts pour des angles importants.





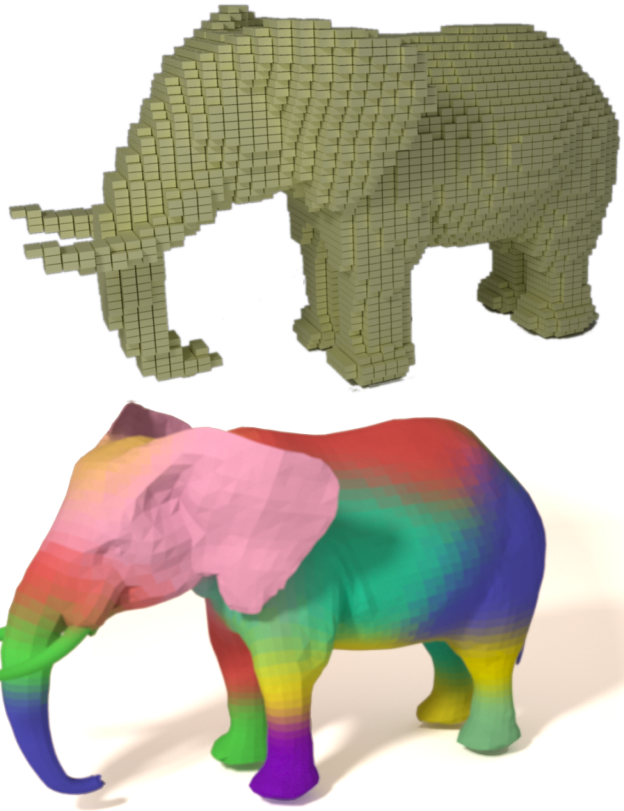
Artefact : Collapsing Elbow



Améliorations Poids de skinning

Poids de skinning : Problème de distance cartésienne.

- Méthode 2 : Un artiste peint directement sur le maillage
- Méthode 3 : Plus intelligent (distance curviligne, geodesique, ...)

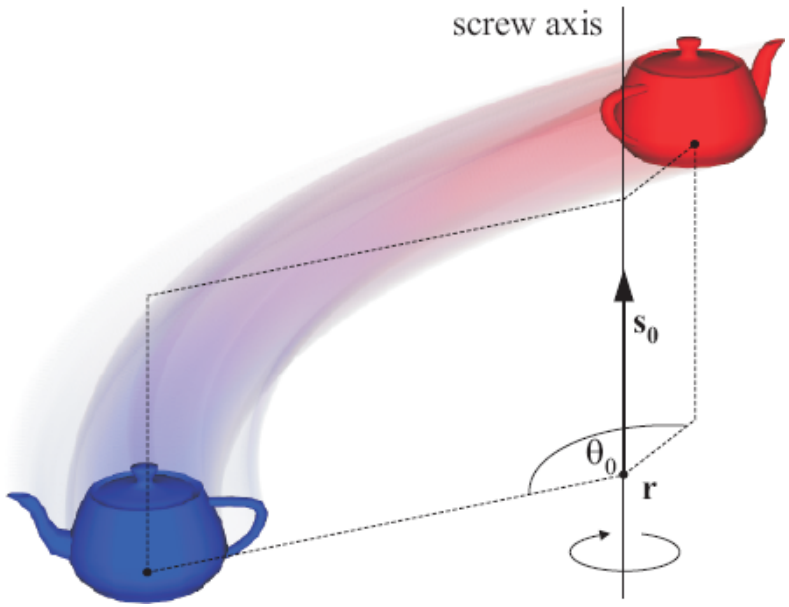


Améliorations Possibles

Interpolation : Interpolation linéaire n'est pas correcte.
$\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 \neq \mathcal{R}$.

$\Rightarrow$ Comment interpoler une matrice de transformation ?

- **Exponential map** : Problème de temps de calcul.
- **Quaternions** : Ici on a un axe de rotation qui se translate.
- **Dual Quaternions** : OK



Autres methodes

Skinning = **S**keleton **S**ubspace **D**eformation
Methode la plus adaptée pour les mouvements articulés autour d'un squelette.

- Déformer un visage = interpolation de formes
- Déformation "molles" = FFD
- Déformations hierarchiques = Multiresolution
- Déformations libres = Inversion de matrices + contraintes