

ETI5 Majeure Image: Continuité et courbure des surfaces différentiables

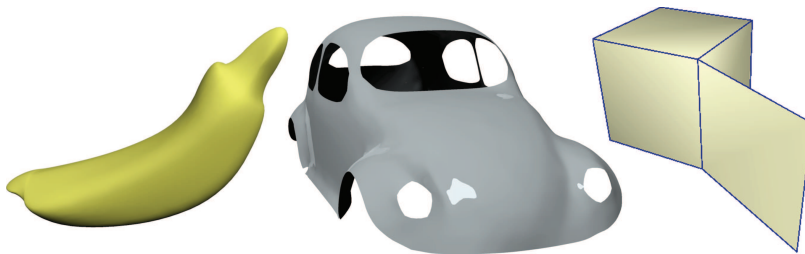
CPE Lyon
damien.rohmer@cpe.fr

4 Novembre 2010

Surfaces différentiables

Notion de variété

- Une surface Γ est une **2-variété (manifold)** ssi tout point possède un voisinage **homéomorphe** à un (demi) disque.
- Homéomorphisme = application bijective continue + réciproque continue.

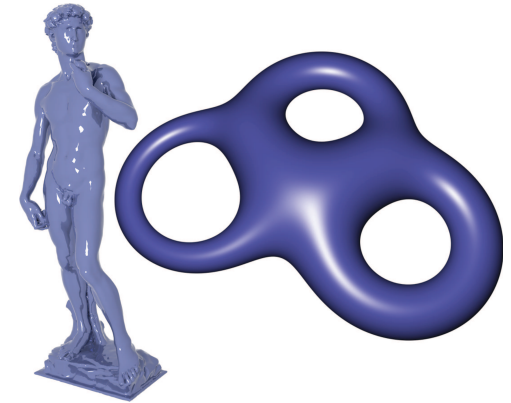


Surfaces différentiables

Notion de topologie

- **Topologie** = Étude de la structure d'un espace **indépendamment de sa géométrie**.

- 2 surfaces sont topologiquement équivalentes si on peut transformer l'une en l'autre par des transformations continues (pas de déchirures ni soudures).



Surfaces différentiables

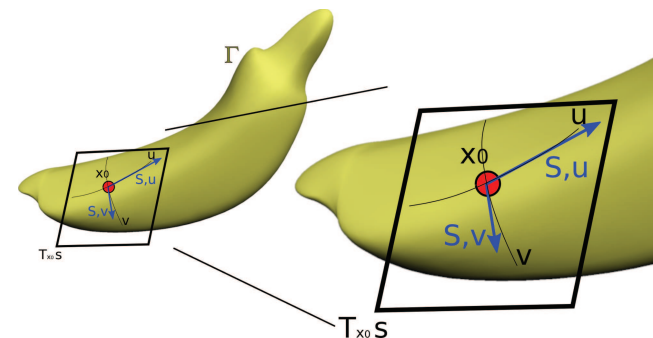
Notion de continuité

- Soit Γ la surface associée au mapping S .

$$S : \begin{cases} \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) & \mapsto S(u, v) \end{cases}$$

$$\Gamma = \text{tr}_{\mathcal{D}}(S) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \forall (u, v) \in \mathcal{D}, S(u, v) = \mathbf{x}\}$$

- S est \mathcal{C}^1 ssi $S_{,u}$ et $S_{,v}$ sont définies et continues.
- S est \mathcal{C}^2 ssi $S_{,uu}$, $S_{,vv}$ et $S_{,uv}$ sont définies et continues.



Surfaces différentiables

Notion de continuité

- Γ est \mathcal{G}^1 ssi

$$\exists (S, \mathcal{D}) \subset \mathcal{C}^1 \times \mathbb{R}^2, \text{tr}_{\mathcal{D}}(S) = \Gamma \\ \Leftrightarrow \text{plan tangent partout}$$

- Γ est \mathcal{G}^2 ssi

$$\exists (S, \mathcal{D}) \subset \mathcal{C}^2 \times \mathbb{R}^2, \text{tr}_{\mathcal{D}}(S) = \Gamma \\ \Leftrightarrow \text{courbure continue}$$

Remarque $S \in \mathcal{C}^k \Rightarrow \Gamma \in \mathcal{G}^k$.

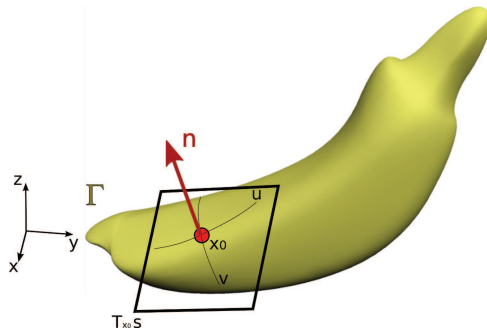
\mathcal{G}^2 nécessaire pour reflets.

Surfaces différentiables

Propriétés intégrales

Propriétés intégrales :

- Aire de Γ : $\int \int_{(u,v) \in \mathcal{D}} \|S_u \times S_v\| du dv$.
- Volume domaine défini par Γ : $\int \int_{(u,v) \in \mathcal{D}} S_z(u, v) n_z^S(u, v) du dv$

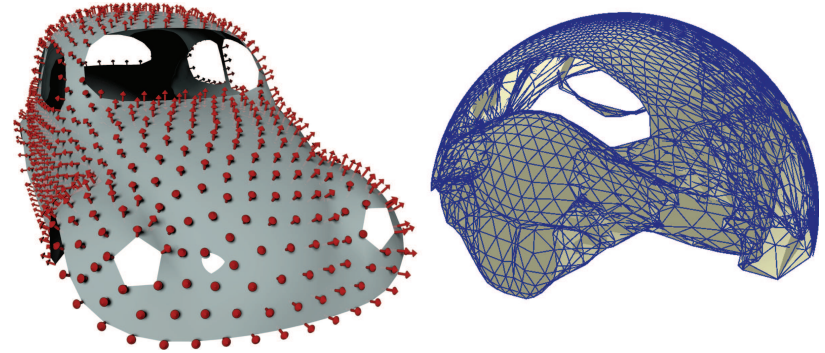


Surfaces différentiables

Plan tangent

- Surface de \mathbb{R}^3 : $S(u, v) = (S_x(u, v), S_y(u, v), S_z(u, v))$
- Normale : $n^S(u, v) = (S_u \times S_v) / \|S_u \times S_v\| \in \mathbb{S}^2$
- Espace tangent de S en x_0 :
 $T_{x_0} S = \text{Im}(DS(u, v)) = \{S_u(u, v)h_u + S_v(u, v)h_v \mid (h_u, h_v) \in \mathbb{R}^2\}$.
- Application de Gauss :

$$N : \begin{cases} \Gamma & \rightarrow \mathbb{S}^2 \\ x_0 = S(u, v) & \mapsto N(x_0) = n(u, v) \end{cases}$$

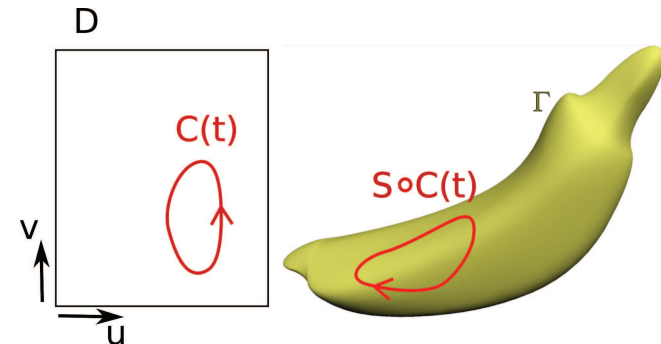


Surfaces différentiables

Première forme fondamentale

- Courbe $C \subset \mathcal{D}$ de longueur $L = \int_t \langle C'(t), C'(t) \rangle^{1/2} dt$.
- Longueur de $C_S = S(C_x, C_y)$

$$L_S = \int_t \langle (S \circ C)'(t), (S \circ C)'(t) \rangle^{1/2} dt \\ = \int_t (C'^T(t) I_S(t) C'(t))^{1/2} dt$$



Surfaces différentiables

Première forme fondamentale

- I_S : Première forme fondamentale / tenseur métrique

$$I_S = \begin{pmatrix} S_{,u}^2 & \langle S_{,u}, S_{,v} \rangle \\ \langle S_{,u}, S_{,v} \rangle & S_{,v}^2 \end{pmatrix}$$

- I_S : forme quadratique associée à $\langle dS, dS \rangle$
- $\sqrt{\det(I_S)}$ = variation d'aire infinitésimale
 \Rightarrow Aire de $\Gamma = \int \int_{(u,v) \in \mathcal{D}} \sqrt{\det(I)} \, du \, dv$

Surfaces différentiables

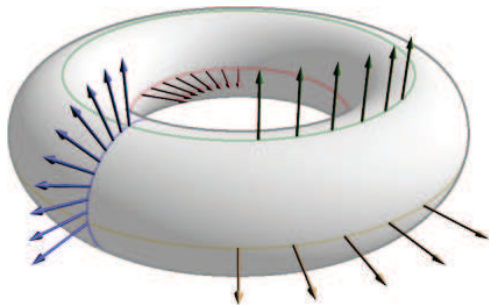
Application de Weingarten

- Application de Weingarten = Différentielle de l'application de Gauss (n) :
- $n_{,u}$ et $n_{,v}$ sont dans le plan tangent.

$$\begin{cases} \det(I) n_{,u} = (I_1 II_1 - I_2 II_0) S_{,u} + (I_1 II_0 - I_0 II_1) S_{,v} \\ \det(I) n_{,v} = (I_1 II_2 - I_2 II_1) S_{,u} + (I_1 II_1 - I_0 II_2) S_{,v} \end{cases}$$

- Shape operator S :

$$S = \frac{1}{\det(I)} \begin{pmatrix} I_1 II_1 - I_2 II_0 & I_1 II_0 - I_0 II_1 \\ I_1 II_2 - I_2 II_1 & I_1 II_1 - I_0 II_2 \end{pmatrix}$$



Wikipedia

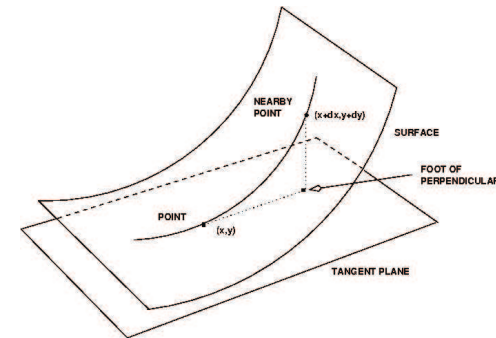
Surfaces différentiables

Seconde forme fondamentale

- II forme quadratique associée à $-\langle dS, dn \rangle$
 $=$ développement de Taylor de la surface dans le plan tangent.

$$II_S = - \begin{pmatrix} \langle n_{,u}, S_{,u} \rangle & \langle n_{,u}, S_{,v} \rangle \\ \langle n_{,u}, S_{,u} \rangle & \langle n_{,u}, S_{,v} \rangle \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow II_S = \begin{pmatrix} \langle S_{,uu}, n \rangle & \langle S_{,uv}, n \rangle \\ \langle S_{,uv}, n \rangle & \langle S_{,vv}, n \rangle \end{pmatrix}$$

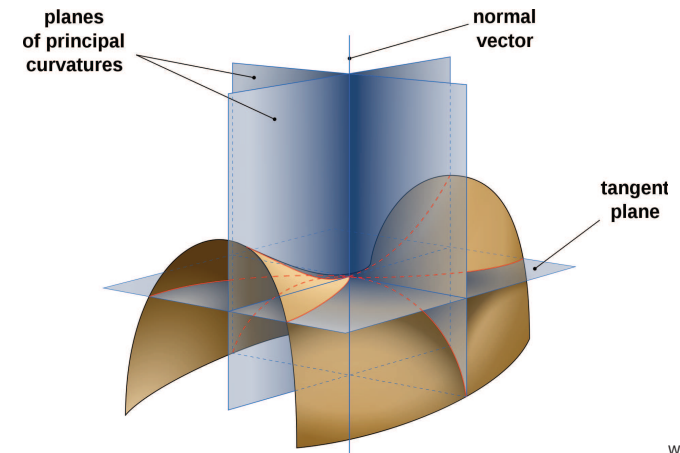


Wikipedia

Surfaces différentiables

Courbure

- Courbure = variation de la normale \Leftrightarrow Weingarten
- S diagonalisable : $S = T^T \text{diag}(\kappa_1, \kappa_2) T$.
- (κ_1, κ_2) = courbures principales.
- T = directions des courbures principales.



Wikipedia

Surfaces différentiables

Courbures

■ Courbure Gaussienne : $K = \kappa_1 \kappa_2 = \det(S) = \frac{\det(\text{II})}{\det(\text{I})}$

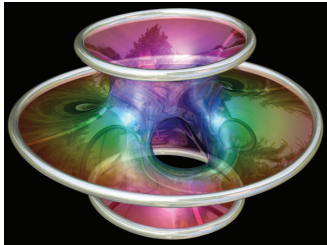
■ Courbure moyenne :

$$H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) = \frac{1}{2}\text{tr}(S) = \frac{1}{2\det(\text{I})}(\text{II}_0\text{I}_2 + \text{I}_0\text{II}_2 - 2\text{I}_1\text{II}_1)$$

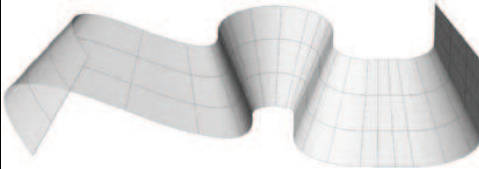
■ $H = 0 \Rightarrow$ surface minimale

■ 2 Surfaces isométriques on le même K

■ $K = 0$ Surface développable



© Paul Nylander



M. Nettelbladt

Relation intégrale

Théorème de Gauss-Bonnet :

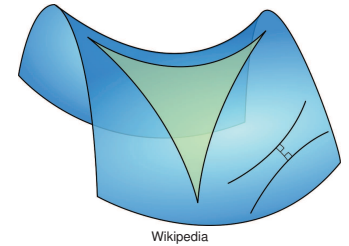
$$\int_S K dA + \int_{\partial S} k_g ds = 2\pi\chi(S)$$

■ k_g : courbure géodésique.

■ χ : Caractéristique d'Euler (invariant topologique).

Application pour un polygone au voisinage d'un sommet :

$$\frac{1}{A} \left(\sum_i \theta_i - 2\pi \right) \simeq K$$



Wikipedia

