

Contours déformables: Snakes

CPE

Novembre 2010

1 Rappels de cours

1.1 Fonctionnelle d'énergie

Étant donné :

- Une image $I : (x, y) \mapsto I(x, y)$
- Une courbe $\gamma : s \mapsto \gamma(s)$

on associe un nombre $E_I(\gamma)$ (ou simplement $E(\gamma)$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté) tel que $E(\gamma)$ soit grand si γ segmente mal un objet de l'image I . On appelle E : l'énergie de la courbe γ .

Une mauvaise segmentation est caractérisée par :

- γ n'est pas une courbe lisse
- ou
- γ ne se place pas sur les contours de I .

Pour satisfaire l'objectif d'une *bonne segmentation*, on recherche parmi l'ensemble des courbes γ possibles une courbe *optimale* γ_{optimal} tel que $E(\gamma_{\text{optimal}})$ soit minimal.

On rappelle l'expression de $E(\gamma)$

$$E(\gamma) = \int_s \lambda_1 \|\gamma'(s)\| + \lambda_2 \|\gamma''(s)\| - \lambda_3 \|\nabla I\|^2(\gamma(s)) ds,$$

avec $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ constantes.

1.2 Minimisation par évolution temporelle

Pour trouver une courbe γ qui minimise E :

- On considère une courbe initiale $\gamma_0 : s \mapsto \gamma_0(s)$
- On définit une équation d'évolution *temporelle* tel que $E(\gamma(s, t))$ diminue lorsque t augmente. (On notera que l'on considère γ également comme fonction du temps (variable t)).

La relation d'évolution temporelle que doit satisfaire γ est exprimable sous forme d'équation différentielle :

$$\begin{cases} \frac{\partial \gamma}{\partial t} = \lambda_1 \gamma'' - \lambda_2 \gamma'''' + \lambda_3 \nabla(\|\nabla I\|^2)(\gamma) \\ \gamma(s, t = 0) = \gamma_0(s) \end{cases}$$

Une fois cette relation discrétisée spatialement et temporellement, on peut définir un algorithme itératif convergeant vers une courbe discrète minimisant E .

$$\begin{cases} v_{x,k} = A^{-1}(v_{x,k-1} + \Delta t P_{x,k}) \\ v_{y,k} = A^{-1}(v_{y,k-1} + \Delta t P_{y,k}) \end{cases},$$

avec $A = \text{Id} + \Delta t(-\lambda_1 D_2 + \lambda_2 D_4)$, $P_k = \lambda_3 \nabla(\|\nabla I\|^2)(v_{k-1})$. Δt étant le pas de discrétisation temporel, D_2 et D_4 étant les matrices de dérivées numériques d'ordre 2 et 4, k l'instant discret courant, et $v = (v_x, v_y)$ étant le vecteur discret des positions spatiales de la courbe continue γ .

2 Cours

Question 1 Définir précisément chacun des 3 termes de l'expression de l'énergie $E(\gamma)$. Quels sont leurs rôles respectifs, de quoi dépendent-ils, que modélisent ils ... ?

Question 2 Donnez 3 exemples de segmentations nécessitant l'utilisation des contours déformables, car non traitable par des méthodes automatiques (méthodes basées régions, histogramme, ...).

3 Energie interne

Soit 2 courbes de même longueurs

$$\gamma_A : \begin{cases} [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ s \mapsto r_A \begin{pmatrix} \cos(2\pi s) \\ \sin(2\pi s) \end{pmatrix} \end{cases} \quad \gamma_B : \begin{cases} [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ s \mapsto \begin{pmatrix} \cos(2\pi s) + 0.02 \cos(40\pi s) \\ \sin(2\pi s) + 0.02 \sin(40\pi s) \end{pmatrix} \end{cases}$$

avec $r_A = \text{longueur}(\gamma_B)/(2\pi)$.

Question 3 Tracez l'allure des courbes γ_A et γ_B .

Question 4 Calculez $\int_{s=0}^1 \|\gamma'_A(s)\|^2 ds$, et $\int_{s=0}^1 \|\gamma'_B(s)\|^2 ds$. Comparez ces deux valeurs. Est-ce bien le résultat attendu ?

Question 5 Ecrivez en pseudo-code un algorithme permettant de vérifier les valeurs de la question précédente sur des courbes discrètes.

4 Energie externe

Soit l'image I_0 montrée en fig. 1. On considèrera que la couleur blanche correspond à la valeur de niveau de gris 255 d'un pixel. La couleur noire correspondant à la valeur 0.

Question 6 Dessinez l'aspect de la norme du gradient de cette image $\|\nabla I_0\|$. Donnez les valeurs correspondantes.

Question 7 Soit

$$\gamma_0 : \begin{cases} [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ s \mapsto \begin{pmatrix} a \cos(2\pi s) + x_0 \\ a \sin(2\pi s) + y_0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Donnez la valeur de l'énergie externe : $-\|\nabla I\|(\gamma_0)$ pour $a = 1.5r$, pour $a = r$, et pour $a = 0.8r$. Est-ce bien le résultat attendu ?

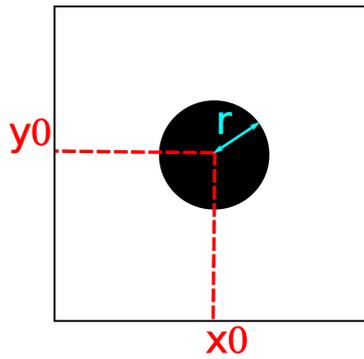


FIGURE 1 – Image I_0

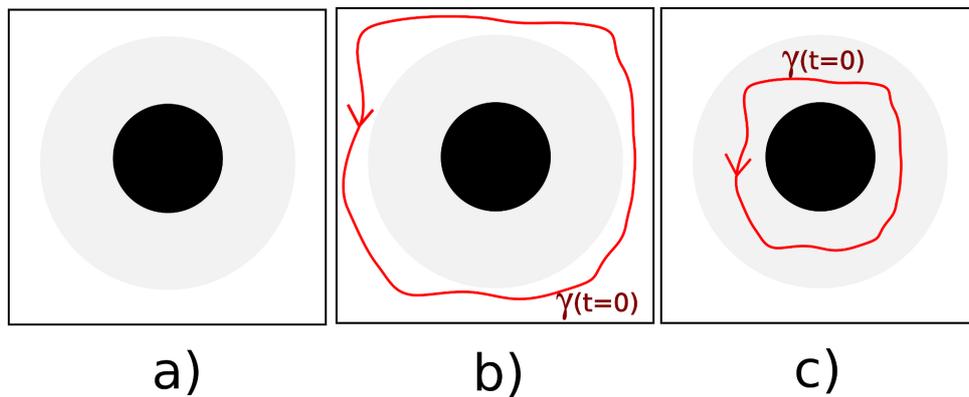


FIGURE 2 – Image I_1

5 Evolution

On considère désormais l'image I_1 montrée en fig. 2a). La couleur grise correspondant à la valeur de niveau de gris 240.

Question 8 Quelle est la courbe finale obtenue après convergence de l'algorithme des Snakes lorsque la courbe initiale $\gamma(t = 0)$ est celle décrite sur les fig. 2b) et fig. 2c) respectivement ?

Question 9 Peut-on modifier ces résultats si on multiplie λ_1 , λ_2 et λ_3 par la même valeur ? Même question si on modifie chaque terme indépendamment.

6 Expression de l'énergie

On considère désormais une énergie modifiée

$$E(\gamma) = \int_s \lambda_1 \|\gamma'(s)\| + \lambda_3 / (1 + \|\nabla I\|^2(\gamma(s))) ds$$

Question 10 Que représente géométriquement $\int \|\gamma'\|$ par rapport à la courbe γ ?

Question 11 Trouvez la nouvelle équation d'évolution temporelle continue associée à cette énergie.

Question 12 Trouvez la nouvelle relation itérative discrète associée à cette énergie.