Level-Set.

Annexe fonctions scalaires et opérateurs.

CPE Lyon
damien.rohmer@cpe.fr

05 Janvier 2010

Preambule : Fonction scalaires et gradient en 2D

- Fonction scalaire 2D ϕ :

$$\phi : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \mapsto & \mathbb{R} \\ (x, y) & \rightarrow & \phi(x, y) \end{cases}$$

- Dérivées partielles :

$$\phi_{,x}(x, y) = \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y) \ , \ \phi_{,y}(x, y) = \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y)$$

Preambule : Fonction scalaires et gradient en 2D

- Opérateur gradient ∇ (del, nabla) :

$$\nabla : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \mapsto & \mathrm{T}_{(x,y)}\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^2 \\ & & \\ \phi & \rightarrow & \left(\begin{array}{c} \phi_{,x}(x,y) \\ \phi_{,y}(x,y) \end{array} \right) \end{array} \right. = \nabla\phi(x,y)$$

- Divergence de $\overrightarrow{f} = (f_x, f_y)$

$$\mathrm{div}(\overrightarrow{f}) = \nabla \cdot \overrightarrow{f} = \left(\begin{array}{c} \frac{\partial .}{\partial x} \\ \frac{\partial .}{\partial y} \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c} f_x \\ f_y \end{array} \right) = f_{x,x} + f_{y,y}$$

- Divergence du gradient de ϕ = Laplacien

$$\mathrm{div}(\mathrm{grad}(\phi)) = \nabla \cdot \nabla\phi = \triangle\phi = \phi_{,xx} + \phi_{,yy}$$

Preambule : Fonction scalaires et gradient en 2D

$$\text{Soit } f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \mapsto & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \rightarrow & (f_x(x, y), f_y(x, y)) \end{cases}$$

- Dérivée de fonction composée (Chain rule)

$$\nabla(\phi \circ f) = \begin{pmatrix} < \nabla\phi, f_{,x} > \\ < \nabla\phi, f_{,y} > \end{pmatrix}$$

- Justification :

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}(f_x(x, y), f_y(x, y)) = \frac{\partial\phi}{\partial f_x}\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial f_y}\frac{\partial f_y}{\partial y}$$