Level-Set.

Annexe fonctions scalaires et opérateurs.

CPE Lyon
damien.rohmer@cpe.fr

05 Janvier 2010

Preambule : Fonction scalaires et gradient en 2D

- Fonction scalaire 2D ϕ :

$$\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \mapsto & \mathbb{R} \\ (x,y) & \rightarrow & \phi(x,y) \end{array} \right.$$

- Dérivées partielles :

$$\phi_{,x}(x,y) = \frac{\partial \phi}{\partial x}(x,y) \quad , \quad \phi_{,y}(x,y) = \frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y)$$

Preambule : Fonction scalaires et gradient en 2D

- Opérateur gradient ∇ (del, nabla) :

$$\nabla : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \mapsto & \mathrm{T}_{(x,y)}\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^2 \\ \phi & \rightarrow & \begin{pmatrix} \phi_{,x}(x,y) \\ \phi_{,y}(x,y) \end{pmatrix} \end{array} \right. = \nabla\phi(x,y)$$

- Divergence de $\vec{f} = (f_x, f_y)$

$$\mathrm{div}(\vec{f}) = \nabla \cdot \vec{f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial .}{\partial x} \\ \frac{\partial .}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = f_{x,x} + f_{y,y}$$

- Divergence du gradient de ϕ = Laplacien

$$\mathrm{div}(\mathrm{grad}(\phi)) = \nabla \cdot \nabla\phi = \triangle\phi = \phi_{,xx} + \phi_{,yy}$$

Preambule : Fonction scalaires et gradient en 2D

$$\text{Soit } f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \mapsto & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \rightarrow & (f_x(x,y), f_y(x,y)) \end{array} \right.$$

- Dérivée de fonction composée (Chain rule)

$$\nabla(\phi \circ f) = \begin{pmatrix} < \nabla\phi, f_{,x} > \\ < \nabla\phi, f_{,y} > \end{pmatrix}$$

- Justification :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(f_x(x,y), f_y(x,y)) = \frac{\partial \phi}{\partial f_x}\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial f_y}\frac{\partial f_y}{\partial y}$$

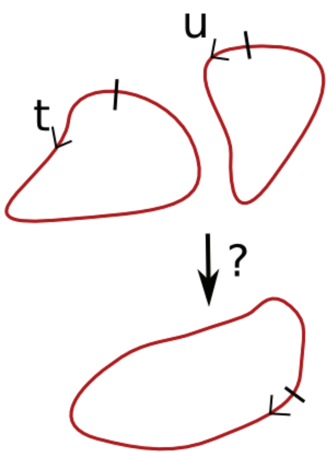
Level-Set. Application aux contours de topologie variable.

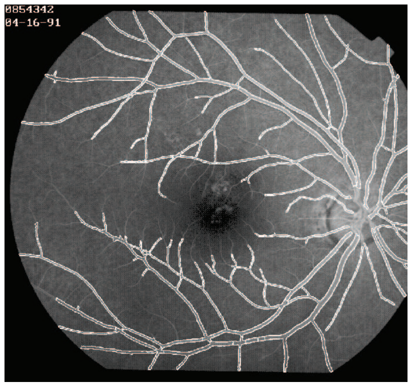
CPE Lyon
damien.rohmer@cpe.fr

05 Janvier 2010

Limite des approches à topologie fixe

- Parametrage de la courbe.





Rappel : Topologie

Wikipedia

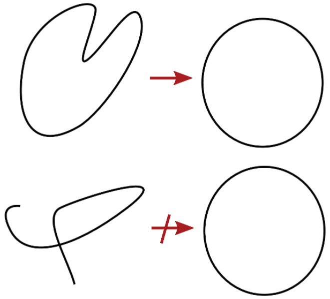
Un espace topologique est un couple (E, T), où E est un ensemble de T, et T un ensemble de parties de E tel que

1. L'ensemble vide et E appartient à T.
2. Toute réunion d'ouverts est un ouvert, c'est-à-dire si $(O_i)_{i \in I}$ est une famille de T, alors $\bigcup O_i \in T$.
3. Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert, c'est-à-dire si $(O_i)_{i \in I}$ sont des élements de T, alors $\bigcap O_i \in T$.

Rappel : Topologie

- S_1 et S_2 sont toplogiquement équivalent (homéomorphe) si il existe un homeomorphisme de S_1 vers S_2.
- **Homéomorphisme** = Application bijective continue.

⇒ Traduction : *2 Courbes ont même topologie si on peut déformer l'une en l'autre sans déchirure si couture.*

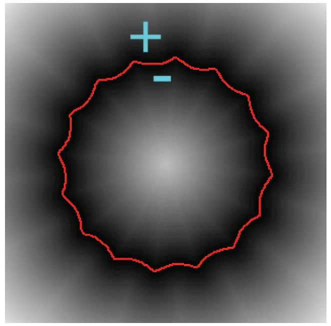


Idée

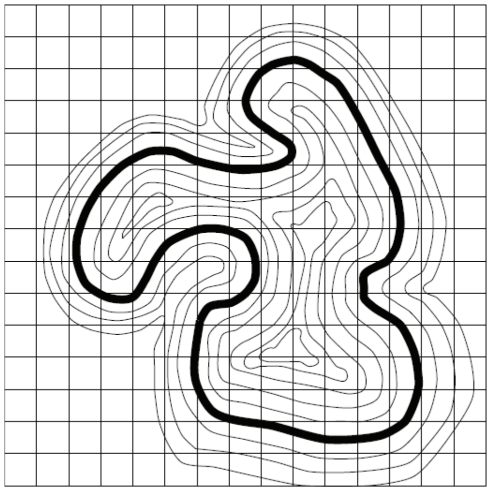
- Ne pas gérer explicitement la topologie grâce à une description implicite.

$$\begin{cases} C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \phi(x, y) = 0\} \\ C = \phi^{-1}(0) \end{cases}$$

- $\phi : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ fonction de potentiel (field function).



Idée



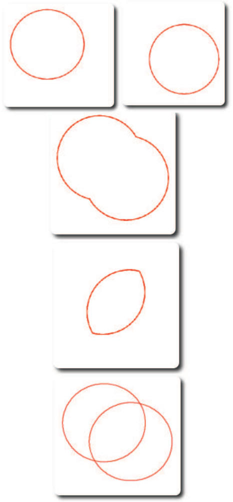
Inventeurs

- Stanley Osher (UCLA), Applied math.
- James Sethian (UC Berkeley), Applied math.
- Ronald Fedkiw (Standford), CG.

S. Osher, J. Sethian. Fronts Propagating with Curvature Dependent Speed : Algorithms Based on Hamilton-Jacobi Formulations. *Journal of Computational Physics.* 1988.

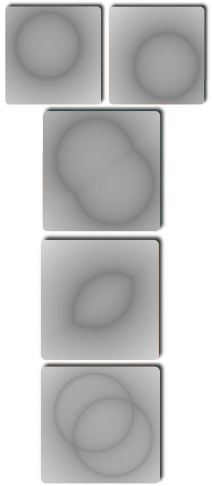
Exemples

- 1 Cercle
- Union de cercles
- Intersection de cercles
- 2 Cercles



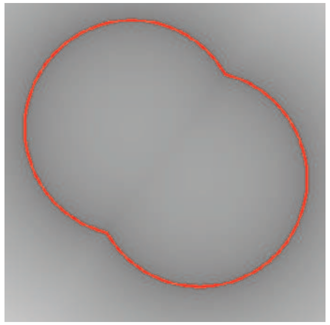
Mélange de formes

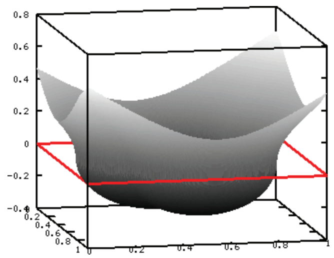
- 2 Formes de bases
  $C_1 = \phi_1^{-1}(0), C_2 = \phi_2^{-1}(0)$
  - Union
    $$C_1 \cup C_2 : \phi = \min(\phi_1, \phi_2)$$
  - Intersection
    $$C_1 \cap C_2 : \phi = \max(\phi_1, \phi_2)$$
  - Somme
    $$C_1 + C_2 : \phi = \phi_1 \phi_2$$



Déformation

- Problème : Déformer une courbe $C(u)$ en ayant connaissance du potentiel $\phi(x, y)$.





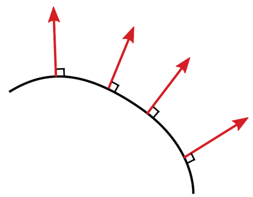
Relation courbe/potentiel

- Normales extérieures à la courbe

$$\forall u, \phi(C(u)) = \text{const}$$
$$\Rightarrow \forall u, \frac{\partial \phi}{\partial u}(C(u)) =< \nabla\phi(C(u)), C'(u) >= 0$$
$$\Rightarrow \nabla\phi \perp C'$$

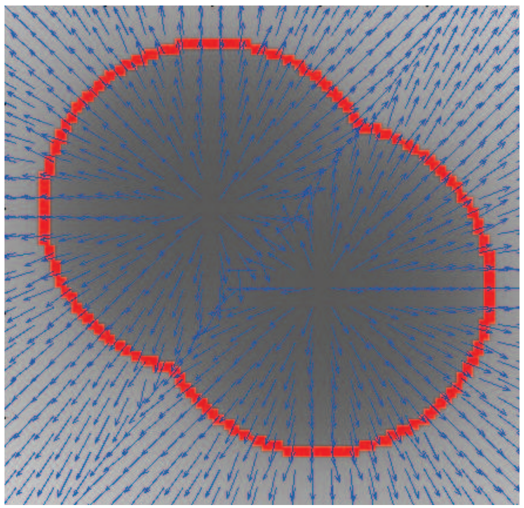
- Normale unitaire à $C(u) = (x_0, y_0)$:

$$n(x_0, y_0) = \frac{\nabla\phi(x_0, y_0)}{\|\nabla\phi(x_0, y_0)\|}$$



Analogie equipotentielles / lignes de champs

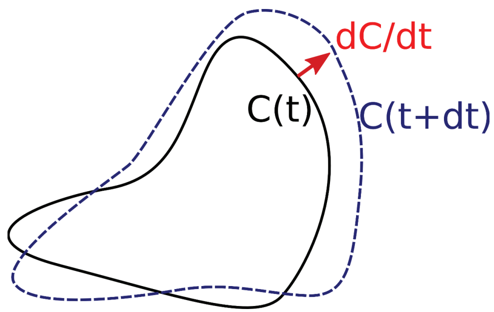
$$n = \frac{\nabla\phi}{\|\nabla\phi\|}$$



Equation de propagation

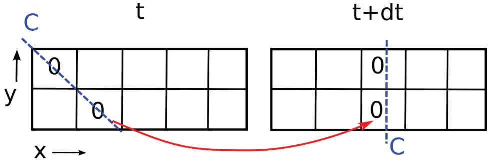
- Courbe $C(u)$ se déforme suivant vitesse $v(u)$.

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) = v$$



Equation de propagation

- Vue *Eulerienne* sur ϕ sur l'interface $C = \phi^{-1}(0)$:



$$\phi(x + \mathrm{d}x, y + \mathrm{d}y, t + \mathrm{d}t) = \phi(x, y, t) \Rightarrow \mathrm{d}\phi(x, y, t) = 0$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial\phi}{\partial t}\mathrm{d}t = 0\\
&\Rightarrow \frac{\partial\phi}{\partial t} = -\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\\
&\Rightarrow \phi_{,t} + < \nabla\phi, v >= 0
\end{aligned}$$

Equation de propagation

Evolution de la courbe

$$C_{,t} = v$$

Evolution du potentiel

$$\phi_{,t} + < v, \nabla\phi >= 0$$

- Propagation equation, Convection equation.
- Avantage : ϕ indépendant de la topologie de C.

Evolution normale

- *Rem* Seule la composante normale de $v_n =< v, n >$ importe
  - Rappel : $n = \frac{\nabla\phi}{\|\nabla\phi\|}$

$$\begin{aligned}
&\phi_{,t} + < v, \nabla\phi >= 0\\
&\Leftrightarrow \phi_{,t} + < v, n > \|\nabla\phi\| = 0\\
&\Leftrightarrow \phi_{,t} + v_n\|\nabla\phi\| = 0
\end{aligned}$$

Equation d'evolution equivalente

$$\phi_{,t} + < v, \nabla\phi >= 0$$

$$\phi_{,t} + v_n\|\nabla\phi\| = 0$$

Ex. Rotation d'un cercle

Evolution suivant la normale

- Dans le cas d'une courbe C :

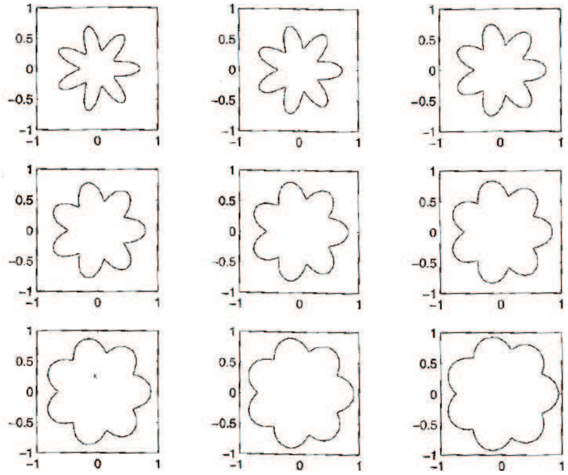
$$C_{,t} = a\, n$$

  - $a > 0$ dilatation
  - $a < 0$ contraction
- Equation sur ϕ :

$$\phi_{,t} + a\, \|\nabla\phi\| = 0$$

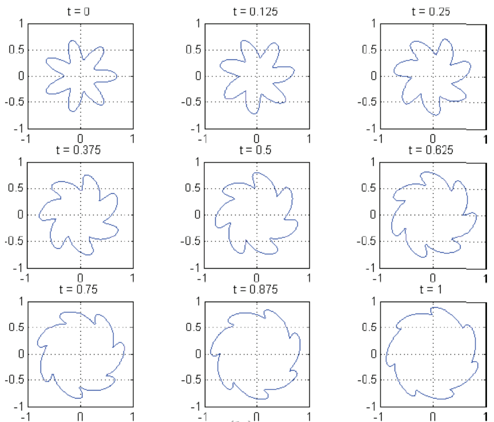
Evolution suivant la normale

Exemples



Evolution suivant la normale

Exemples : Quel est la vitesse ?



(b)

Evolution suivant la courbure

La courbure (moyenne) : $\kappa = \mathrm{div}(n)$.
Dans le cas d'une courbe C :

- Angle formés par les normales entre u et $u + \mathrm{d}u$.

$$\kappa(u) = \frac{\|C'(u) \times C''(u)\|}{\|C'(u)\|^3} = (\nabla \cdot n)(u)$$

- Calcul à partir de ϕ :

$$\kappa = \nabla \cdot \frac{\nabla\phi}{\|\nabla\phi\|}$$

Evolution suivant la courbure

Courbe se lissant dans les zones de forte courbure :

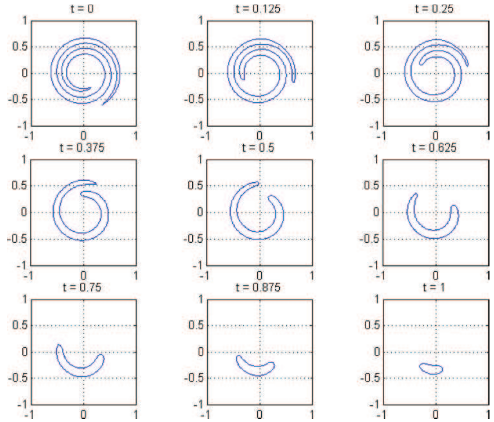
- Equation de la courbe :

$$C_{,t}(u,t) = -\kappa(u,t)n(u,t)$$

- Equation sur ϕ :

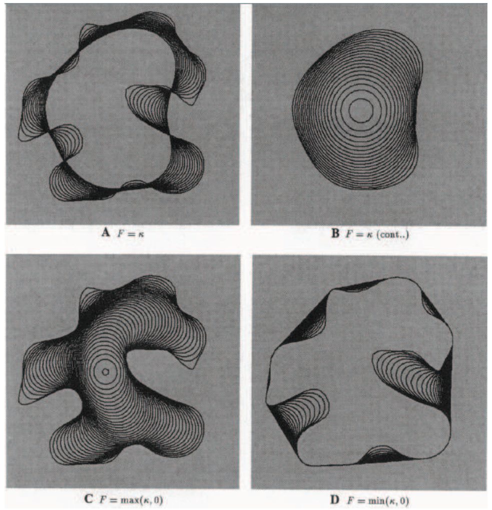
$$\phi_{,t} - \nabla \cdot \frac{\nabla\phi}{\|\nabla\phi\|}\|\nabla\phi\| = 0$$

Exemples



Exemples

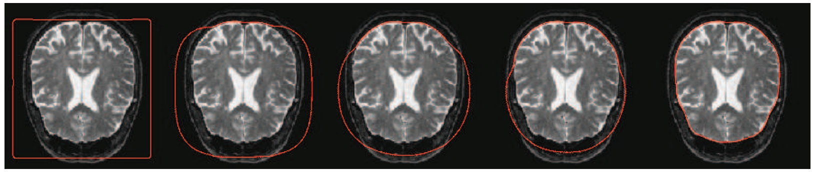
Exemples



Application a la detection de contours

Rappel des Snakes :

- On se place sur le maximum du gradient



$$\text{minimise } E(C) = \int_C \underbrace{\omega_1\|C'\|^2 + \omega_2\|C''\|^2}_{\text{force interne}} - \underbrace{\omega_3\|\nabla I\|^2(C)}_{\text{force externe}}$$

Application a la detection de contours

- Force interne (extension/contraction et lissage)

$$F(\phi) = a - \kappa(\phi)$$

- Force externe

$$G(I) = 1/(1 + \|\nabla I\|)$$

- Equation d'evolution :

$$\phi_{,t} = G(I)F(\phi)\|\nabla\phi\|$$

$$\phi_{,t} = \frac{1}{1 + \|\nabla I\|}(\kappa(\phi) - a)\|\nabla\phi\|$$

Discretisation

- On veut résoudre

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(x,y,t) = \underbrace{\frac{1}{1+\|\nabla I(x,y)\|}}_{W_{ext}(x,y)} \underbrace{\left(\left(\nabla \cdot \frac{\nabla \phi}{\|\nabla \phi\|}\right)(x,y,t) - a\right) \|\nabla \phi(x,y,t)\|}_{W_{int}(x,y,t)}$$

- Discretisation spatiale à t fixée :

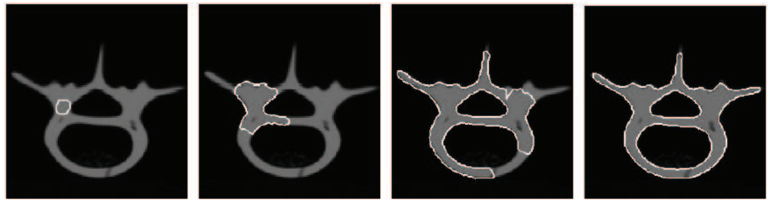
$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t) = W_{ext} W_{int}(t)$$

- Discrétisation temporelle :

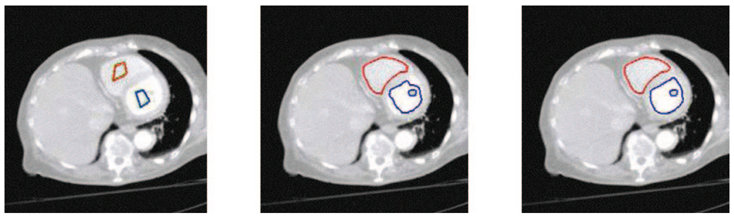
$$\phi^{t+1} = \phi^{t} + \Delta t \; W_{ext} W_{int}^{t}$$

Application a la detection de contours

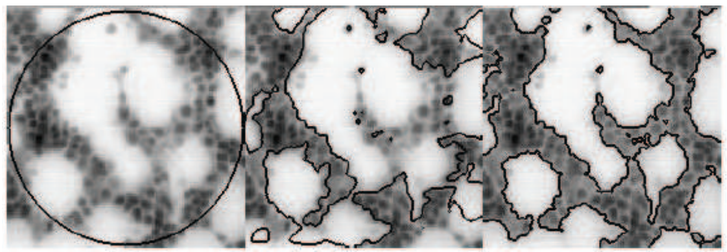
Exemples



Application a la detection de contours

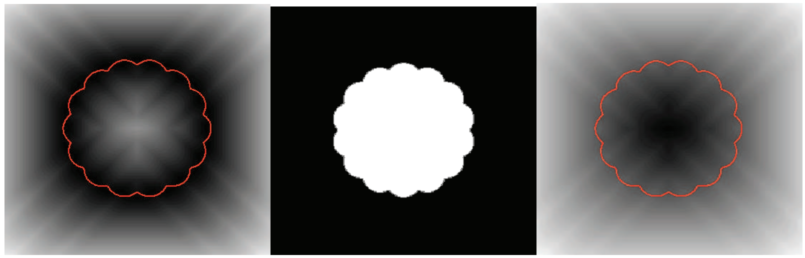


Application a la detection de contours



Annexe : Construction d'une fonction de distance signée

1. Fonction de distance non signée : (ex. Danielson)
2. Ajout du signe par propagation.



Implementation

```
obj<-image du contour
dist=Danielson(obj);
sign=propagation(obj);

phi=dist.*sign;

for k=0:N
  [phi_x,phi_y]=gradient(phi);
  vn=calcul_vitesse_normal(image,phi);
  phi = phi + dt*(vn.*(phi_x^2+phi_y^2)^(0.5));
end
```


Limitations

- Problème de **divergence** : Methode de resolutions.
- **Interpolation** : perte de matière.
- **Cout de calcul** : Réinitialisation de la fonction de distance.

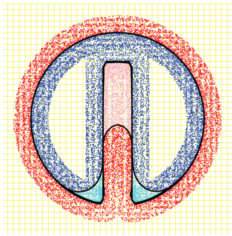
Divergence

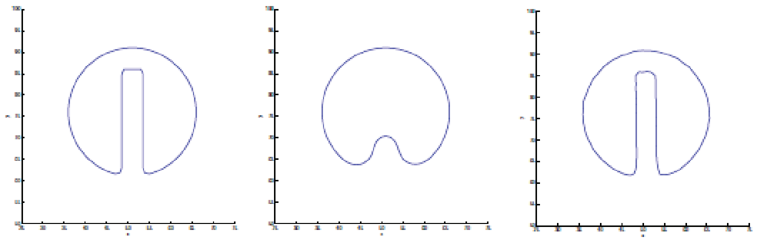
PDE : non linéaire, non lisse.

- Traitement séparé de la discrétisation gauche-droite de droite-gache.
  $\Rightarrow$ **ENO (Essentially Non Oscillatory) scheme**.
- ou : **TVD-Runge Kutta scheme**.
- Réinitialisation régulière de la fonction de distance.

Interpolation

- Ajout d'une contrainte de conservation d'aire(/volume).
- **Semi-Lagrangian particle level set**





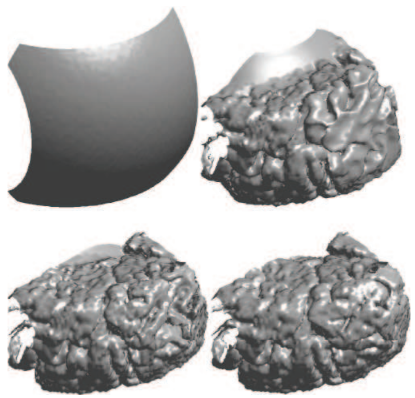
Fast marching

- Réinitialisation de la fonction de distance : Re-calcul local : *Fast marching method*.

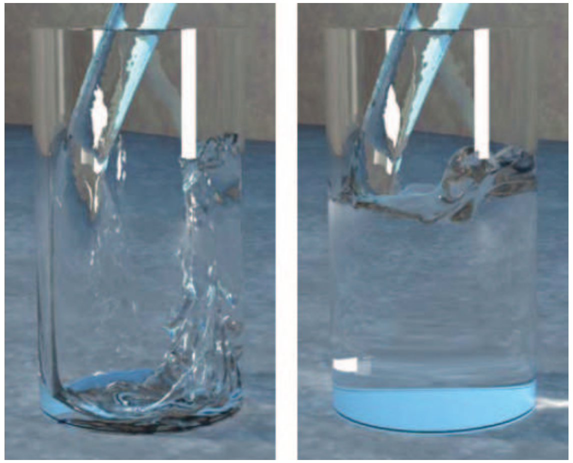
J. Sethian. A Fast Marching Level Set Method for Monotonically Advancing Fronts. *Proceedings of National Academy of Sciences.* 1996.

Extension : 3D

- Extension à la 3D immédiate
  - couteux
  - mémoire



Extension : Forces controlées par phénomènes physiques



Extension : Forces controlées par phénomènes physiques