Visualisation-Multiresolution 9-Données Vectorielles

Polytech-Grenoble

1er semestre 2008

Généralités

- On est sur une surface (v=2) ou un volume (v=3).
- On est plongé dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.
- On a typiquement $d = 3$ (ou 2) composantes par positions
- Cas d'exemple général :

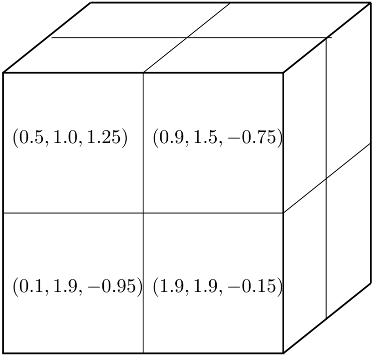
$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = \Big(f_1(u_1, u_2, u_3), f_2(u_1, u_2, u_3), f_3(u_1, u_2, u_3)\Big)$$

- Cas classique :

$$\overrightarrow{f} = \Big(f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z)\Big)$$

Généralités

- En discret : Valeurs vectorielles sur chaque échantillon (voxel si suivant x,y,z)



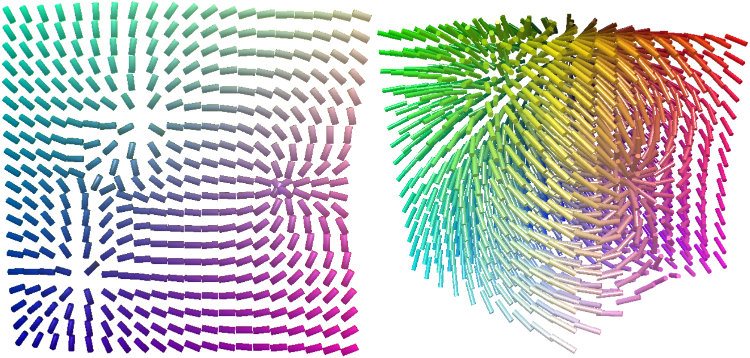
Affichage direct

- Le plus simple : On affiche un vecteur pour chaque position
- Si on est sur un volume V de $\mathbb{R}^3$, on affiche alors le vecteur

$$V(u_1, u_2, u_3) + \lambda \overrightarrow{f}(u_1, u_2, u_3) .$$

```
Pour tout (x,y,z) de V
 Affiche segment [V(x,v,y),V(x,y,z)+ a * f(x,y,z)]
```

Affichage direct



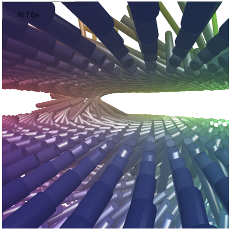
Affichage direct

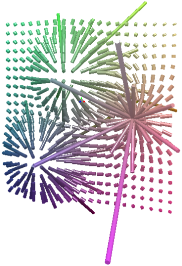
Avantages :

- ⊕ Visualisation locale de la direction et norme

Inconvénients :

- ⊖ Indication locale (on ne suis pas de trajet)
- ⊖ Mal adapté à une variation importante de la norme.
- ⊖ Rapidement confus (surtout en 3D)



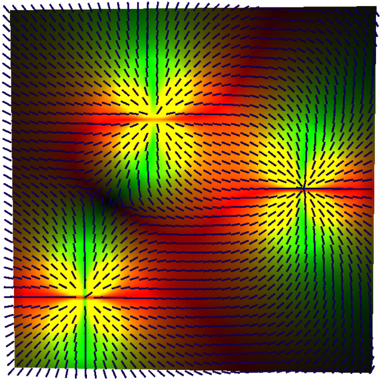


Encodage couleur

- On applique une couleur en fonction de la direction.
- L'amplitude est encodée par l'intensité.
- Surtout pour le cas de surface 2D

⊕ Visualisation continue

⊖ Direction difficile à intérpréter

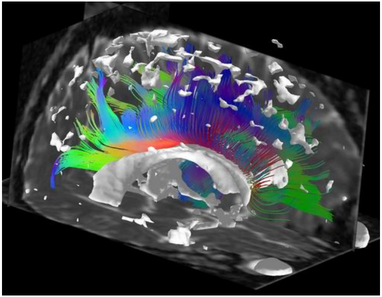


Streamlines

- On cherche à tracer la trajectoire de particules suivant le champ $\vec{f}$.

⊕ Information structurelle Globale

- La trajectoire peut être réelle ou non



Streamlines

- Suivre un flux = intégrer en partant d'un point initial $\overrightarrow{x}(0)$.

$$\overrightarrow{x}(t) = \int_{t'=0}^{t'=t} \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{x}(t')\right) \mathrm{d}t'$$

- Mis sous forme différentielle

$$\begin{cases} \overrightarrow{x}'(t) = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}(t)) \\ \overrightarrow{x}(0) = \overrightarrow{x}_0 \end{cases}$$

- Trouver une trajectoire = résoudre une equation différentielle ordinaire (ODE)

Streamlines : Discrétisation

- Discrétisation temporelle :

$$\overrightarrow{x}'(t) = \frac{\overrightarrow{x}(t+\mathrm{d}t) - \overrightarrow{x}(t)}{\mathrm{d}t} + O(\mathrm{d}t) = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}(t)) + O(\mathrm{d}t)$$

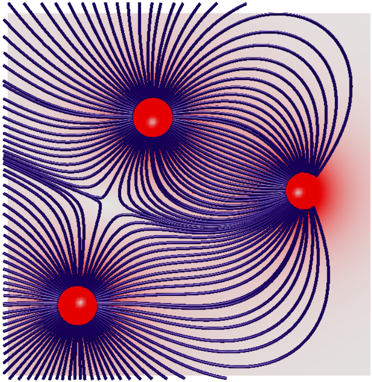
$$\Rightarrow \overrightarrow{x}(t+\mathrm{d}t) = \overrightarrow{x}(t) + \mathrm{d}t\ \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}(t)) + O(\mathrm{d}t^2)$$

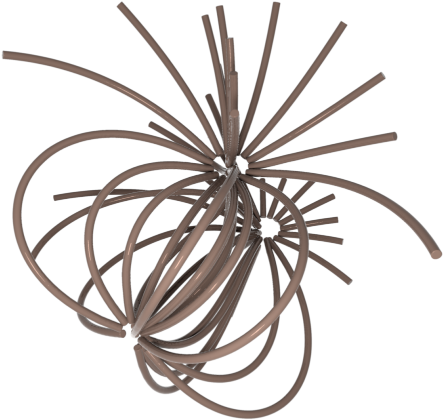
- En prenant k itérations de pas de temps Δt :

$$\overrightarrow{x}^{k+1} \simeq \overrightarrow{x}^{k} + \Delta t\ \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}^{k})$$

- Méthode d'Euler explicite du premier ordre

Streamlines : Exemples



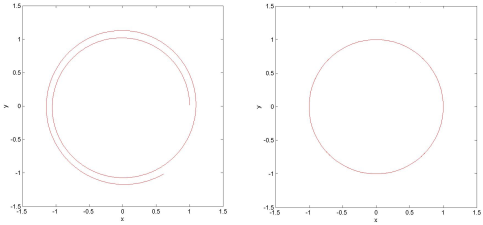


Streamlines : Stabilité

- Problème de stabilité des méthodes explicites
- Fonctions raides (stiff)
- Méthode implicite

$$\overrightarrow{x}(t+\mathrm{d}t) = \overrightarrow{x}(t) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}(t+\mathrm{d}t))\,\mathrm{d}t$$

$$(\overrightarrow{\mathrm{Id}} - \Delta t\,\overrightarrow{f})(\overrightarrow{x}^{k+1}) = \overrightarrow{x}^{k}$$



Streamlines : Précision (accuracy)

- Euler ordre 1 : À chaque pas de temps, on fait une erreur qui varie en $O(\Delta t^2)$.
- Ordre supérieur :
  - Approximer dérivée ordre n (complexe)
  - Runge-Kutta : (ex. RK4)

$$\left\{\begin{array}{l}
\overrightarrow{x}^{k+1} = \overrightarrow{x}^{k} + \frac{\Delta t}{6}(\overrightarrow{k_1} + 2\overrightarrow{k_2} + 2\overrightarrow{k_3} + \overrightarrow{k_4}) \\
\\
\overrightarrow{k_1} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}^{k}) \\
\overrightarrow{k_2} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}^{k} + \frac{\Delta t}{2}\overrightarrow{k_1}) \\
\overrightarrow{k_3} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}^{k} + \frac{\Delta t}{2}\overrightarrow{k_2}) \\
\overrightarrow{k_4} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}^{k} + \Delta t\overrightarrow{k_3})
\end{array}\right.$$