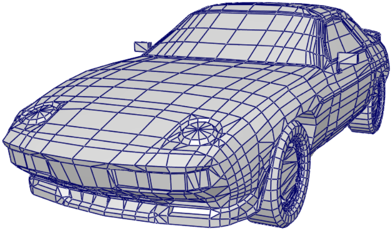
Visualisation-Multiresolution
4-Courbes Splines

Polytech-Grenoble

1er semestre 2008

CAD

- **C**omputer **A**ided **D**esign
  - Pierre Bézier, Renault
  - Paul de Casteljau, Citroën

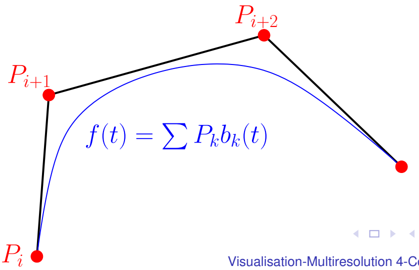


Expression Analytique

- Etant donné un ensemble de positions discrètes, obtenir une expression analytique d'une courbe lisse.
- On recherche une base de fonction b_i

Expression analytique

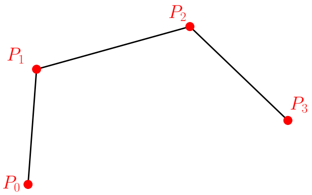
$$f(t) = \sum_k P_k b_k(t)$$



Expression Analytique - base de fonctions

Exemples de fonctions pour N points ($t \in [0, N]$).

- $b_k(t) = 1$
- $b_k(t) = \frac{1}{N}$
- $b_k(t) = \frac{1}{2} \prod(t - k)$
- $b_k(t) = \bigwedge(t - k)$



- Importance de la régularité des fonctions de bases. $b_k \in \mathcal{C}^n \Rightarrow f \in \mathcal{C}^n$.

Bézier

- Bézier Propose les polynomes de Bernstein

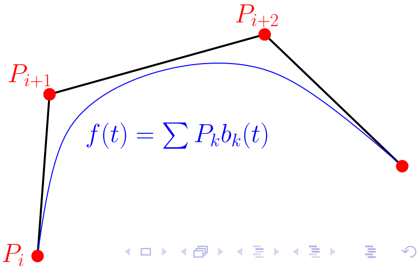
Bernstein

$$\forall t \in [0,1],\ b_k(t) = C_k^n t^k (1-t)^{n-k}$$

ex. Pour 4 points :

$$f(t) = (1-t)^3\, P_0 + 3\,(1-t)^2\, t\, P_1 + 3\,(1-t)\, t^2\, P_2 + t^3\, P_3$$

- $f(0) = P_0$
- $f(1) = P_4$
- $f'(0) = 3\overrightarrow{P_0 P_1}$
- $f'(1) = 3\overrightarrow{P_2 P_3}$



Théorème de Stone-Weierstrass

Approximation de Stone-Weierstrass

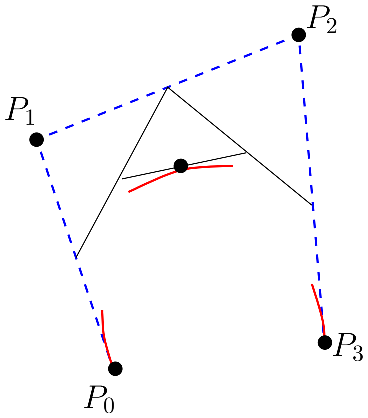
$$\forall f \in \mathcal{C}^0_{[a,b]}\,, \forall \epsilon > 0\,, \exists P \in \mathbb{P};\ \forall x \in [a,b],\ |f(x) - P(x)| < \epsilon$$

Pour démontrer cela, on se place sur [0,1], et on utilise pour N suffisement grand

$$P(x) = \sum_{k=0}^{N} C_k^N x^k (1-x)^{N-k} f\left(\frac{k}{N}\right)$$

Algorithme de De Casteljau

- Construction itérative
- Approximation manuelle rapide en utilisant la tangente



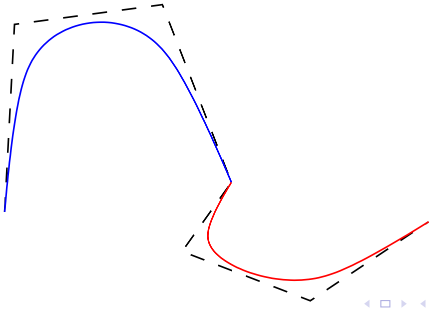
Bézier

Caractéristiques :

- $\forall x, \sum_k b_k(x) = 1$ invariance
- $\forall x, \forall k, \; b_k(x) \geq 0$ polygon convexe

Défauts

- Le controle n'est pas locale
- Le raccord de courbes n'est pas trivial

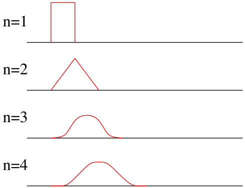


B-Spline

But :

Avoir une courbe C^k, avec un controle locale

Un vector de noeud $[t_0, \cdots, t_m]$



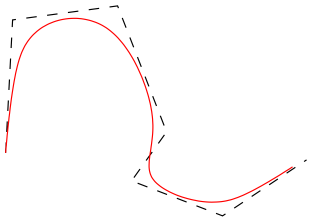
$$b_{j,0}(t) = \begin{cases} 1 & t_j \leq t < t_{j+1} \\ 0 \text{ sinon} & \end{cases}$$

$$b_{j,n}(t) = \frac{t - t_j}{t_{j+n} - t_j} b_{j,n-1}(t) + \frac{t_{j+n+1} - t}{t_{j+n+1} - t_{j+1}} b_{j+1,n-1}(t)$$

B-Spline

Interet :

- Controle locale de la courbe.
- Raccord de courbe C^2 pour des splines de degrés 3.

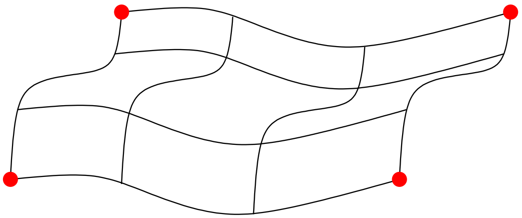


Surfaces

- Fonctionnement 2D pour des surfaces $\Rightarrow$ Produit tensoriel
- Grille de controles P_{jk}

Produit tensoriel

$$f(u,v) = \sum_j \sum_k b_j(u) b_k(v) P_{jk}$$



Surfaces

On utilise un degré 3 pour une continuitée C^2.

- Mise sous forme Matricielle

$$f(u, v) = (u^3 u^2 u\ 1)\ M\ [P_{jk}]\ M^T\ (v^3 v^2 v\ 1)^T$$

- Avec, pour une B-spline dont le vecteur de noeud est uniforme

$$M = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$